Abteilung für Angewandte Mathematik 11.01.2010

Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2009/10 — Woche 11

Abgabe: Montag, den 18. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 35 — 5 Punkte

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das von $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ aufgespannte Dreieck und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass

$$\int_D g(x+y)\, d\lambda^2(x,y) = \int_0^1 g(t)t\, dt.$$

Aufgabe 36 — 15 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $p, q \in [1,\infty)$. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$\begin{aligned} f(\cdot,\eta) &: x \mapsto f(x,\eta) && \text{ist messbar auf } \Omega \text{ für alle } \eta \in \mathbb{R}, \\ f(x,\cdot) &: \eta \mapsto f(x,\eta) && \text{ist stetig auf } \mathbb{R} \text{ für fast alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Es gebe eine Funktion $a \in L^q(\Omega)$ und ein $b > 0$ so, dass für fast alle $x \in \Omega$ und alle $\eta \in \mathbb{R}$

$$|f(x,\eta)| \leq |a(x)| + b\,|\eta|^{p/q}.$$

Für $u \in L^p(\Omega)$ definieren wir $(Fu)(x) := f(x,u(x))$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass F eine stetige Abbildung von $L^p(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$ ist und für ein $c > 0$ und alle $u \in L^p(\Omega)$ gilt

$$\|Fu\|_{L^q(\Omega)} \leq c\left(\|a\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}\right). \tag{36.1}$$

Diese Aussage unterteilen wir in mehrere Schritte

(a) **Messbarkeit:**
Zeigen Sie, dass $F(u)$ für alle $u \in L^p(\Omega)$ λ^n-messbar ist.
Tipp: Approximieren Sie durch Treppenfunktionen.

(b) **Beschränktheit:**
Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^p(\Omega)$ die Abschätzung (36.1) gilt.
Tipp: Nutzen Sie die Hölderabschätzung und die Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^2$.

(c) **Stetigkeit:**
Zeigen Sie, dass F stetig von $L^p(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$ ist.
Tipp: Sei $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$. Zeigen Sie zunächst Konvergenz von $F(u_n) \to F(u)$ in $L^q(\Omega)$ für eine geeignete Teilfolge u_{n_k}: Zeigen Sie $f(\cdot,u_{n_k}) \to f(\cdot,u)$ fast überall. Benutzen Sie nun Aufgabe 29 und die Wachstumsbedingungen von f. Zeigen Sie, dass auch für die ganze Folge $F(u_n) \to F(u)$ in $L^q(\Omega)$ gilt.