

**Analysis III**

WS 2009/10 — Woche 12

**Abgabe: Montag, den 25. Januar, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 37**

**7 Punkte**

Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $\mu$  ein endliches signiertes Maß auf  $\mathcal{A}$ .

- (a) Sei  $X = P \cup N$  eine Hahnzerlegung (wie in Aufgabe 17) in eine positive Menge  $P$  und eine negative Menge  $N$ . Sei  $\mu^+(A) := \mu(A \cap P)$  und  $\mu^-(A) := -\mu(A \cap N)$ . Aus der Lösung von Aufgabe 18 wissen wir bereits, dass  $\mu^+, \mu^-$  endliche Maße sind mit  $\mu = \mu^+ - \mu^-$ . Zeigen Sie, dass zusätzlich  $\mu^+ \perp \mu^-$  gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass es genau eine Zerlegung  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  in endliche Maße  $\mu^+$  und  $\mu^-$  auf  $\mathcal{A}$  gibt derart, dass  $\mu^+ \perp \mu^-$ . (Insbesondere ist damit die Konstruktion aus (a) unabhängig von der Hahnzerlegung.)
- (c) Wir definieren ein endliches Maß  $|\mu|$  durch  $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ . Zeigen Sie, dass für jedes  $A \in \mathcal{A}$  gilt:

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A), \quad \mu^+(A) \leq |\mu|(A), \quad \mu^-(A) \leq |\mu|(A).$$

**Definition:** Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und seien  $\mu, \nu$  endliche, signierte Maße auf  $\mathcal{A}$ . Wir sagen  $\nu$  ist absolut stetig bzgl.  $\mu$  (in kurz:  $\nu \ll \mu$ ), falls  $\nu(E) = 0$  für alle  $E \in \mathcal{A}$  mit  $|\mu|(E) = 0$ . Wir sagen  $\nu \perp \mu$ , falls es ein  $M \in \mathcal{A}$  gibt mit  $|\mu|(M) = 0 = |\nu|(X \setminus M)$ .

**Aufgabe 38**

**3 Punkte**

Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und seien  $\mu, \nu$  endliche, signierte Maße auf  $\mathcal{A}$ . Zeigen Sie, dass  $\nu \ll \mu$  im Sinne von signierten Maßen genau dann, wenn  $|\nu| \ll |\mu|$  im Sinne von Maßen.

**Aufgabe 39**

**5 Punkte**

Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Seien  $\mu, \nu$  endliche, signierte Maße auf  $\mathcal{A}$ . Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Zerlegung  $\nu = \nu_a + \nu_s$  mit  $\nu_a \ll \mu$  und  $\nu_s \perp \mu$  gibt.

Tipp: Nutzen Sie die Resultate für endliche Maße aus der Vorlesung.

**Aufgabe 40**

**5 Punkte**

Beweisen Sie für das Lebesgue-Maß des durch

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq (r(z))^2, z \in [a, b]\}$$

gegebenen Rotationskörpers mit stetigem  $r : [a; b] \rightarrow (0, \infty)$  die Formel

$$|A| = \pi \int_a^b (r(z))^2 dz.$$

Tipp: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.