Abteilung für Angewandte Mathematik 25.01.2010
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2009/10 — Woche 13

Abgabe: Montag, den 1. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 41 **5 Punkte**

Sei $\alpha > 0$ und $R > 0$. Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ y^2 + z^2 \leq \alpha\, x^2\right\}$$

Skizzieren Sie die Menge A.

Aufgabe 42 **5 Punkte**

Welche der folgenden Mengen sind C^1-Untermannigfaltigkeiten? Begründen Sie!

(a) $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| = |y|\}$,

(b) $M_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,

Aufgabe 43 **5 Punkte**

Sei $r : [a, b] \to (0, \infty)$ stetig und sei (ξ, ζ) der Schwerpunkt der Fläche

$$F := \{(x, z) \,|\, z \in [a, b], 0 \leq x \leq r(z)\},$$

d.h. $\xi = \frac{1}{\lambda^2(F)} \int_F x\, d\lambda^2(x, z)$ und $\zeta = \frac{1}{\lambda^2(F)} \int_F z\, d\lambda^2(x, z)$.
Sei A der durch Rotation von F um die z-Achse entstehende Körper. Zeigen Sie, dass $\lambda^3(A) = 2\pi\xi \cdot \lambda^2(F)$ (Guldinsche Regel).

Aufgabe 44 **5 Punkte**

Sei T der Volltorus, welcher durch Rotation der Kreisscheibe K mit $K = \{(x, z) \,|\, (x - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$, $0 < r < R$ um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen von T und verifizieren Sie hieran die Guldinsche Regel (Aufgabe 43).