Analysis III

WS 2009/10 — Woche 14

Abgabe: Montag, den 8. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 45 **4 Punkte**

Es sei $Z := S^1 \times (-1,1)$. Berechnen Sie $\int_Z x^2 \, d\omega_Z(x,y,z)$.

Aufgabe 46 **4 Punkte**

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int\limits_{S^2} x^2\, y^2\, z^2 \, d\omega_{S^2}(x,y,z)$.

Aufgabe 47 **8 Punkte**

Für $R > 0$ sei $A \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \le R^2, (x-R/2)^2+y^2 \le (R/2)^2\big\}.$$

Skizzieren Sie A und berechnen Sie das Volumen von A.
$\big($Zur Kontrolle: $\operatorname{Vol}(A) = \frac{2}{3}(\pi - 4/3)\, R^3\big)$.

Aufgabe 48 **4 Punkte**

Es sei $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ und $r(x) := x^{-\alpha}$ für $x \ge 1$. Zeigen Sie, dass der Rotationskörper $\{(x,y,z) \in [1,\infty) \times \mathbb{R}^2 \,|\, y^2+z^2 \le (r(x))^2\}$ ein endliches Volumen, aber eine unendliche Oberfläche hat.

Zusatzaufgabe 49 **10 Sonderpunkte**

Sei $n \ge 3$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $K := \operatorname{supp}\varphi$. Wir definieren $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) k(x-y)\, dy$$

mit $k(z) = \frac{c_n}{n-2} |z|^{2-n}$, wobei $|z|^2 = z_1^2 + \cdots + z_n^2$ und c_n das $n-1$-dimensionale Volumen der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ ist. Zeigen Sie: u ist wohldefiniert, erfüllt $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus K)$ und löst auf $\mathbb{R}^n \setminus K$ die Gleichung $-\Delta u = 0$.
(Achtung: Die Formel $-\Delta u = 0$ gilt nur auf $\mathbb{R}^n \setminus K$. Man kann zeigen, dass $-\Delta u = \varphi$ auf $\mathbb{R}^n$ gilt.)

Zusatzaufgabe 50 **5 Sonderpunkte**

Es seien $p, q, r \in [1,\infty)$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{r}(tu)^r \le \frac{1}{p} t^p + \frac{1}{q} u^q$ für alle $t, u \ge 0$ gilt. (Sie dürfen Lemma 9.4 aus der Vorlesung benutzen.)

(b) Zeigen Sie mit (a), dass für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ gilt: $\|fg\|_r \le 1$.

(c) Zeigen Sie $\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$ für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$.