Abteilung für Angewandte Mathematik 26.10.2009
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2009/10 — Woche 2

Abgabe: Montag, den 2. November, vor der Vorlesung

Definition: Für eine Folge $(A_n) \subset \mathcal{P}(X)$ definieren wir den *Limes Superior/Inferior* durch

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Aufgabe 4 **6 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $(A_n) \subset \mathcal{A}$ eine Folge.

(a) Zeigen Sie, dass $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n, \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(b) Zeigen Sie $\mu(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(c) Sei $\mu(\bigcup_{k\geq N} A_k) < \infty$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mu(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Aufgabe 5 **6 Punkte**

Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ läßt sich als abzählbare Vereinigung von offenen Würfeln darstellen. Hierbei ist ein Würfel eine Menge der Form $x+(-\ell/2, \ell/2)^n := \{x + y \,|\, y \in (-\ell/2, \ell/2)^n\}$, wobei x das Zentrum des Würfels und ℓ die Seitenlänge ist.

Aufgabe 6 **5 Punkte**

Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass für beliebige Mengensysteme $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ gilt $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$. Tipp: Aufgabe 2.

Aufgabe 7 **3 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $f_n : X \to \overline{R}$ eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer, numerischer Funktionen. Zeigen Sie, dass $\{x \,|\, f_n(x) \text{ konvergiert}\} \in \mathcal{A}$.