Abteilung für Angewandte Mathematik 2.11.2009
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2009/10 — Woche 3

Abgabe: Montag, den 9. November, vor der Vorlesung

Definition: Für $A, B \subset X$ definieren wir die *symmetrische Differenz* $A \triangle B$ durch

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

d.h. $A \triangle B$ enthält die x aus X, welche entweder in A oder in B liegen.

Aufgabe 8 — 5 Punkte

Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$, versehen mit der symmetrischen Differenz $\triangle$ als Addition und der Durchschnittsbildung $\cap$ als Multiplikation, ein kommutativer Ring (im Sinne der Algebra) mit Nullelement $\emptyset$ und Einselement X ist.

Aufgabe 9 — 4 Punkte

Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $\mathcal{R}$ ist ein Ring über X (im Sinne der Vorlesung), d.h. $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $A, B \in \mathcal{R}$ impliziert $A \setminus B, A \cup B \in \mathcal{R}$.

(b) $\mathcal{R}$ ist ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ (im Sinne der Algebra), d.h. $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $A, B \in \mathcal{R}$ impliziert $A \triangle B, A \cap B \in \mathcal{R}$.

Dies rechtfertigt den Namen „Ring“ in der Vorlesung.

Aufgabe 10 — 6 Punkte

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über Y. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist $f^{-1}(\mathcal{R}) := \big\{ f^{-1}(A) \,|\, A \in \mathcal{R} \big\}$ ein Ring über X.

(b) Ist $Z \subset Y$, so ist $\mathcal{R}|_Z := \big\{ A \cap Z \,|\, A \in \mathcal{R} \big\}$ ein Ring über Z.

(c) $\mathcal{A} := \mathcal{R} \cup \{ Y \setminus A \,|\, A \in \mathcal{R} \}$ ist die kleinste Algebra über Y, die $\mathcal{R}$ enthält.

Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien f, f_n μ-messbare, μ-fast überall endliche Funktionen. Man sagt, dass die Folge f_n *im Maß gegen* f *konvergiert*, falls

$$\lim_{n \to \infty} \mu\big(\big\{ |f - f_n| \geq \varepsilon \big\} \big) = 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Wir schreiben kürzer: $f_n \to f$ im Maß.

Aufgabe 11 — 5 Punkte

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$. Seien f_n, f μ-messbar und μ-fast überall endlich. Die Folge f_n konvergiere μ-fast überall gegen f. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ im Maß gilt.