

Analysis III

WS 2009/10 — Woche 4

Abgabe: Montag, den 16. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 12

4 Punkte

Sei $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar. Zeigen Sie, dass A eine μ -Nullmenge ist, wobei μ das im Satz 3.7 mithilfe des Elementarinhalts in \mathbb{R} konstruierte äußere Maß ist.

Aufgabe 13

4 Punkte

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ nicht-leer, durchschnittsstabil und vereinigungsstabil. Definiere

$$\mathcal{H} := \{A \setminus B \mid A, B \in \mathcal{E}\}.$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{H} ein Halbring ist.

Aufgabe 14

4 Punkte

Sei $(\mu_n)_n$ eine isotone Folge von Prämaßen auf einem Ring \mathcal{R} , d.h. $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mu_\infty(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$ ein Prämaß auf \mathcal{R} definiert.

Aufgabe 15

8 Punkte

Sei $\mathcal{J} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ der Halbring der links-offenen, rechts-abgeschlossenen Intervalle.

- Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine wachsende¹ Funktion. Zeigen Sie, dass durch $\mu_F((a, b]) := F(b) - F(a)$ ein endlicher Inhalt auf \mathcal{J} definiert wird.
- Seien $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wachsende Funktionen. Zeigen Sie, dass $\mu_F = \mu_G$ genau dann, wenn $F - G$ konstant ist.
- Sei μ ein endlicher Inhalt of \mathcal{J} und definiere $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu((0, x]) & \text{für } x \geq 0, \\ -\mu((x, 0]) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F_μ wachsend ist und $\mu_{F_\mu} = \mu$ gilt.

- Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wachsend. Zeigen Sie $F = F_{\mu_F} + F(0)$.

¹Muss nicht strikt wachsend sein.