Abteilung für Angewandte Mathematik 16.11.2009
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2009/10 — Woche 5

Abgabe: Montag, den 23. November, vor der Vorlesung

Definition: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heisst *endliches, signiertes Maß* auf $\mathcal{A}$, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und μ σ-additiv ist, d.h. für paarweise disjunkte Mengen $A_j \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. (Man beachte, dass die Konvergenz der Reihe mit gefordert wird.) Eine Menge $P \in \mathcal{A}$ heisst *positiv* (bzw. *negativ*), falls $\mu(A) \geq 0$ (bzw. $\mu(A) \leq 0$) für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subset P$.

Aufgabe 16 **2+2+2+1 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei μ eine endliches, signiertes Maß auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\sup_{A\in\mathcal{A}} \mu(A) < \infty$ und $\inf_{A\in\mathcal{A}} \mu(A) > -\infty$.

(b) Sind $A_j \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, so konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ absolut.

(c) Ist $A_j \in \mathcal{A}$ mit $A_j \nearrow A$, dann gilt $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu(A)$.

(d) Ist $A_j \in \mathcal{A}$ mit $A_j \searrow A$, dann gilt $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu(A)$.

Aufgabe 17 **3+2+2+2 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei μ eine endliches, signiertes Maß auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $A \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ so, dass $\mu(B) \geq \mu(A)$ und $\mu(M) > -\varepsilon$ für jede Menge $M \in \mathcal{A}$ mit $M \subset B$.

(b) Zu jedem $A \in \mathcal{A}$ gibt es eine positive Menge $P \in \mathcal{A}$ mit $P \subset A$ und $\mu(P) \geq \mu(A)$.

(c) Es existiert eine disjunkte Zerlegung (*Hahn-Zerlegung*) $X = P \cup N$ mit $P, N \in \mathcal{A}$ in eine positive Menge P und eine negative Menge N. Dies ist der sogenannte *Hahn'sche-Zerlegungssatz.*

(d) Sind $X = P \cup N = P' \cup N'$ zwei Hahn-Zerlegungen mit positiven P, P' und negativen N, N', so gilt $\mu(P \triangle P)' = \mu(N \triangle N') = 0$. Dies zeigt, dass die Hahn-Zerlegung im gewissen Sinne eindeutig ist.

Aufgabe 18 **4 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie, dass μ genau dann ein endliches, signiertes Maß auf $\mathcal{A}$ ist, wenn es endliche Maße μ^+, μ^- auf $\mathcal{A}$ gibt, mit $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Tipp: Hahn'scher Zerlegungssatz Aufgabe 17 (c).