Abteilung für Angewandte Mathematik — 23.11.2009

Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2009/10 — Woche 6

Abgabe: Montag, den 30. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 19 — **7 Punkte**

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^1([a,b])$.

(a) Sei $E := \{x \in [a,b] \,|\, f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $f(E)$ eine Lebesgue Nullmenge ist.

Tipp: Benutzen Sie Lemma 6.16 aus der Vorlesung.

(b) Sei $G := \{x \in [a,b] \,|\, f(x) = 0\}$ und $H := \{x \in [a,b] \,|\, f(x) = 0, f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $G \setminus H$ eine Lebesgue Nullmenge ist.

Tipp: Zeigen Sie, dass $A_n := \{x \in [a,b] \,|\, f(x) = 0, |f'(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ nur endliche viele Elemente enthält.

Aufgabe 20 — **3 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass der Grenzwert von „Konvergenz im Maß“ eindeutig ist in dem Sinne, dass zwei Grenzwerte μ-fast überall übereinstimmen.

Bemerkung: „Konvergenz im Maß“ ist definiert auf dem Blatt von Woche 3.

Aufgabe 21 — **5 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ und $\lambda^n(A) < \infty$. Zeigen Sie, dass A beschränkt ist.

Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien f_n, f μ-messbar und μ-fast überall endlich. Wir sagen, dass f_n *fast gleichmäßig gegen f konvergiert*, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge A_ε gibt mit $\mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ und $f_n \rightrightarrows f$ auf A_ε.

Aufgabe 22 — **5 Punkte**

Sei μ ein endliches Maß auf X. Seien f_n, f μ-messbar und fast überall endlich derart, dass f_n fast gleichmäßig gegen f konvergiert. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ μ-fast überall.

Bemerkung: Dies ist im gewissen Sinne die Umkehrung vom Satz von Egorov.