Abteilung für Angewandte Mathematik 30.11.2009
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2009/10 — Woche 7

Abgabe: Montag, den 7. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 23 **5 Punkte**

Sei μ ein endliches Maß auf X. Seien f_n, f μ-messbar und fast überall endlich, so dass f_n gegen f im Maß konvergiert. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge gibt, die fast gleichmäßig gegen f konvergiert.
Bemerkung: In Kombination mit Aufgabe 22 ist dies im gewissen Sinne eine Umkehrung von Aufgabe 11.

Aufgabe 24 **5 Punkte**

Seien A, B messbar mit $\lambda^n(A), \lambda^n(B) < \infty$. Zeigen Sie, dass $\lambda^n(A \cap (B+x)) \to \lambda^n(A \cap B)$ für $x \to 0$.
Tipp: Approximieren Sie B von unten durch eine kompakte Menge K und von oben durch eine offene Menge U. Nutzen Sie, dass $K + x \subset U$ und $K - x \subset U$ für x genügend klein.

Aufgabe 25 **6 Punkte**

Sei A konvex und beschränkt, mit $0 \in \operatorname{int}(A)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda^n(\overline{A}) = \lambda^n(\operatorname{int}(A))$.
Tipp: Zeigen Sie zunächst $\operatorname{int}(A) = \bigcup_{k\geq 2}((1-\frac{1}{k})\overline{A})$.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda^n(\partial A) = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass A messbar ist.

Definition: Eine auf einem Intervall $I = [a, b]$ definierte Funktion f heißt *absolut stetig*, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass für jede endliche Familie paarweiser disjunkter Intervalle (a_k, b_k), die alle in I enthalten sind und der Bedingung $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |b_k - a_k| < \delta$ genügen, gilt $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Aufgabe 26 **4 Punkte**

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ absolut stetig. Zeigen Sie, dass f λ^1-Nullmengen auf λ^1-Nullmengen abbildet.