Abteilung für Angewandte Mathematik 7.12.2009
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2009/10 — Woche 8

Abgabe: Montag, den 14. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 27 — 6 Punkte

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(A) = 1$. Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ konvex und $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi\bigg(\int_X f\, d\mu\bigg) \leq \int_X \varphi(f)\, d\mu$$

Dies ist die sogenannte *Jensen'sche Ungleichung.*
Tipp: Nutzen Sie $\varphi(y) \geq \varphi(x) + \varphi'(x)(y - x)$.

Aufgabe 28 — 3 Punkte

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass aus $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$, d.h. $\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0$, schon $f_n \to f$ im Maß folgt. Folgern Sie daraus, dass es eine Teilfolge gibt, die fast überall gegen f konvergiert.

Aufgabe 29 — 6 Punkte

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien f_n und f μ-messbar, so dass f_n fast überall gegen f konvergiert. Weiterhin gebe es Funktionen $h_n, h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ derart, dass $|f_n| \leq h_n$ (fast überall) und $h_n \to h$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$

$$\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0 \qquad \text{und} \qquad \int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

Dies ist eine verallgemeinerte Version der majorisierten Konvergenz.
Tipp: Zeigen Sie zunächst $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie dann die Behauptung für eine gute Teilfolge f_{n_j} indem Sie aus den h_{n_j} eine $\mathcal{L}^1(\mu)$-Majorante konstruieren. Schließen Sie dann auf die ganze Folge.

Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Den linearen Raum der μ-messbaren, μ-fast überall endlichen Funktionen bezeichen wir mit $\mathcal{L}^0(\mu)$. Für $f, g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ definieren wir die Äquivalenzrelation $f \sim g$, falls $f = g$ μ-fast überall. Dadurch ergeben sich die Restklassen $[f] := \{g \in \mathcal{L}^0(\mu) \,|\, g \sim f\}$ auf $\mathcal{L}^0(\mu)$. Sei $L^0(\mu) := \mathcal{L}^0(\mu)/\sim$ der Raum der Restklassen.

Aufgabe 30 — 5 Punkte

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $f_k, g, h \in L^0(\mu)$ mit $g \leq f_k \leq h$ μ-fast überall. Seien $D_k \in \mathcal{A}$ die Definitionsbereiche der f_k. Auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $D_\infty := \bigcap_{k=1}^\infty D_k$ definieren wir punktweise $f_\infty := \liminf_{k\to\infty} f_k$. Zeigen Sie, dass $f_\infty \in \mathcal{L}^0(\mu)$.
Ferner definieren wir $\liminf_{k\to\infty}[f_k] := [f_\infty] \in L^0(\mu)$. Zeigen Sie, dass dies wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten aus $[f_k]$.