# 1 Inhaltsfunktionen

In diesem Kapitel wird der Jordansche Inhaltsbegriff für Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$ erklärt. Dabei wird das Volumen zunächst für endliche Vereinigungen von achsenparallelen Quadern, sogenannte Figuren, elementargeometrisch definiert. Dann werden beliebige, beschränkte Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$ von außen und von innen durch solche Figuren approximiert. Es stellt sich heraus, dass auf diese Weise zwar für hinreichend reguläre Mengen ein vernünftiger Inhaltsbegriff gegeben ist, dass aber andererseits mit diesem Zugang nicht einmal allen beschränkten, offenen Mengen sinnvoll ein Volumen zugeordnet werden kann. Parallel zu der konkreten Diskussion im $\mathbb{R}^n$ werden die Begriffe Halbring, Ring, Inhalt allgemein definiert.

**1.1 Definition (Quader).** *Eine Menge $I \subset \mathbb{R}$ heißt Intervall, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gibt, so dass gilt:*

$$(a, b) \subset I \subset [a, b]. \tag{1.2}$$

*Ein achsenparalleler $n$-dimensionaler Quader (im Folgenden kurz als Quader bezeichnet) ist ein kartesisches Produkt $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ von Intervallen. Sind $a_j \leq b_j$ die Intervallgrenzen von $I_j$, so ist das elementargeometrische Volumen von $Q$ definiert als*

$$\lambda^n(Q) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \geq 0. \tag{1.3}$$

Wir wollen nun die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^n$ betrachten. Allgemein bezeichnen wir die Potenzmenge einer Menge $X$, also die Menge aller Teilmengen von $X$, mit $2^X$. Eine Teilmenge von $2^X$ wird in der Maßtheorie als *System von Mengen* bezeichnet, um den Ausdruck „Menge von Mengen“ zu vermeiden.

**1.4 Definition (Halbring).** *Ein Mengensystem $\mathcal{P} \subset 2^X$ heißt Halbring über $X$, wenn gilt:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{P}$

(ii) $P, Q \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad P \cap Q \in \mathcal{P}$

(iii) $P, Q \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow$ *es existieren endlich viele, paarweise disjunkte $P_i \in \mathcal{P}$ mit $P \backslash Q = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$.*

**1.5 Satz (Halbring $\mathcal{P}^n$).** *Das System $\mathcal{P}^n$ der Quader im $\mathbb{R}^n$ ist ein Halbring.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage zunächst für $n = 1$, also für das System aller Intervalle. Die leere Menge ist ein Intervall, denn es gilt $\emptyset = (a, a)$ für $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle mit Grenzen $a \leq b$ bzw. $c \leq d$. Für $I \cap J \neq \emptyset$ ist $\max(a, c) \leq \min(b, d)$, und

$$(\max(a, c), \min(b, d)) \subset I \cap J \subset [\max(a, c), \min(b, d)].$$

Also ist $I \cap J$ ein Intervall. $I \backslash J$ läßt sich als Vereinigung von höchstens zwei disjunkten Intervallen darstellen. Wegen $I \backslash J = I \backslash (I \cap J)$ können wir dazu $J \subset I$ annehmen. Setze

$$I' = \{x \in I \backslash J : x \leq c\} \quad I'' = \{x \in I \backslash J : x \geq d\}.$$

Falls $I' \cap I'' \neq \emptyset$, so ist $c = d \in I \backslash J$, also $J = \emptyset$ bzw. $I \backslash J = I$. Andernfalls gilt die disjunkte Zerlegung $I \backslash J = I' \cup I''$, wobei

$$(a, c) \subset I' \subset [a, c], \quad (d, b) \subset I'' \subset [d, b].$$

Dies zeigt die Behauptung im Fall $n = 1$.

Im $\mathbb{R}^n$ haben wir $\emptyset = \emptyset \times \ldots \times \emptyset \in \mathcal{P}$. Weiter folgt für Quader $P = I_1 \times \ldots \times I_n$ und $Q = J_1 \times \ldots \times J_n$ im $\mathbb{R}^n$

$$P \cap Q = (I_1 \cap J_1) \times \ldots \times (I_n \cap J_n),$$

also ist $P \cap Q$ ein Quader. Nun gibt es zu jedem $x = (x_1, \ldots, x_n) \in P \backslash Q$ ein kleinstes $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_k \notin J_k$. Daraus ergibt sich die paarweise disjunkte Zerlegung

$$P \backslash Q = \bigcup_{k=1}^{n} (I_1 \cap J_1) \times \ldots \times (I_{k-1} \cap J_{k-1}) \times (I_k \backslash J_k) \times I_{k+1} \times \ldots \times I_n.$$

Wie oben gezeigt, ist $I_k \backslash J_k$ Vereinigung von endlich vielen (höchstens zwei) disjunkten Intervallen. Damit ist auch $P \backslash Q$ als Vereinigung von endlich vielen (höchstens $2n$) paarweise disjunkten Quadern dargestellt. □

Der zweite Teil des Beweises von Satz 1.5 zeigt ganz allgemein Folgendes:

**1.6 Folgerung (Produktmengen).** *Für $i = 1, \ldots, n$ sei $\mathcal{P}_i$ ein Halbring über $X_i$. Dann ist das System*

$$\mathcal{P} = \{P_1 \times \ldots \times P_n : P_i \in \mathcal{P}_i\}$$

*der Produktmengen ein Halbring über $X_1 \times \ldots \times X_n$.*

**1.7 Definition (Inhalt).** *Sei $\mathcal{P}$ ein Halbring über $X$. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{P} \longrightarrow [0,\infty]$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$ heißt Inhalt, wenn für jedes $P \in \mathcal{P}$ gilt:*

$$\begin{aligned} &\textit{Ist } P = \bigcup_{i=1}^{k} P_i \textit{ mit } P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{P} \textit{ paarweise disjunkt,} \\ &\textit{so folgt } \lambda(P) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i). \end{aligned} \tag{1.8}$$

**1.9 Satz (Elementarinhalt von Quadern).** *Das elementargeometrische Volumen*

$$\lambda^n(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

*ist ein Inhalt auf dem Halbring $\mathcal{P}^n$ der Quader im $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Offensichtlich ist $\lambda(\emptyset) = 0$. Um die Eigenschaft (1.8) zu zeigen, verwenden wir Induktion über die Dimension $n$. Für $n = 1$ sind die charakteristischen Funktionen von $P, P_1, \ldots, P_k$ integrierbar und wir erhalten

$$\chi_P = \sum_{i=1}^{k} \chi_{P_i} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1(P) = \int_{\mathbb{R}} \chi_P = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} \chi_{P_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_1(P_i).$$

Sei nun die Aussage für den Inhalt $\lambda_{n-1}$ im $\mathbb{R}^{n-1}$ schon bewiesen. Betrachte für den Quader $P = I_1 \times \ldots \times I_n \in \mathcal{P}^n$ den $y$-Schnitt

$$P_y = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, y) \in P\} = \begin{cases} I_1 \times \ldots \times I_{n-1} & \text{falls } y \in I_n \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $P_y = \bigcup_{i=1}^{k} (P_i)_y$ und es folgt induktiv

$$\begin{aligned} \lambda^n(P) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}(P_y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{k} \lambda^{n-1}((P_i)_y)\, dy \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}((P_i)_y)\, dy = \sum_{i=1}^{k} \lambda^n(P_i). \end{aligned}$$

Dies beweist den Satz. □

Unser Ziel ist nun, die Definition der Inhaltsfunktion auf allgemeinere Mengen zu erweitern. Als erstes betrachten wir dabei endliche Vereinigungen von Quadern, sogenannte Figuren. Wie in Satz 1.14 gezeigt wird, ist das System der Figuren unter endlichen Mengenoperationen abgeschlossen, und es ist auch das kleinste Mengensystem mit dieser Eigenschaft, das die Quader enthält. Dafür führen wir die folgenden Begriffe ein.

**1.10 Definition (Ring).** *Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset 2^X$ heißt Ring über $X$, falls gilt:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{R}$

(iii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.

Für zwei Mengen $A, B$ in einem Ring $\mathcal{R}$ liegt auch der Duchschnitt wieder in $\mathcal{R}$, denn es gilt $A \cap B = A \backslash (A \backslash B) \in \mathcal{R}$.

**1.11 Definition (erzeugter Ring).** *Für $\mathcal{E} \subset 2^X$ sei*

$$\varrho(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{R} : \mathcal{R} \text{ ist Ring in } X \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{R}\} . \tag{1.12}$$

*Dann ist $\varrho(\mathcal{E})$ ein Ring mit $\mathcal{E} \subset \varrho(\mathcal{E})$, und heißt der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring. Es gilt*

$$\mathcal{R} \text{ Ring mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad \varrho(\mathcal{E}) \subset \mathcal{R}.$$

Kurz gesagt ist $\varrho(\mathcal{E})$ also der kleinste Ring, der $\mathcal{E}$ enthält. Diese Beschreibung ist allerdings nicht konstruktiv. Bevor wir eine explizite Angabe der Elemente des erzeugten Rings geben benötigen wir noch folgendes Lemma.

**1.13 Lemma.** *Seien $Q, Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{P}$ Elemente eines Halbrings $\mathcal{P}$. Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{P}$ mit*

$$Q \backslash \bigcup_{i=1}^{n} Q_i = \bigcup_{j=1}^{k} P_j .$$

Beweis: Wir beweisen dies mit Induktion über $n$. Für $n = 1$ gilt dies nach Definition 1.4. Ist die disjunkte Zerlegung $Q \backslash \bigcup_{i=1}^{n} Q_i = \bigcup_{j=1}^{k} P_j$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schon gefunden, so folgt

$$Q \backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} Q_i = \big(\bigcup_{j=1}^{k} P_j\big) \backslash Q_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{k} (P_j \backslash Q_{n+1}).$$

Die $P_j \backslash Q_{n+1}$, $j = 1, \ldots, k$, sind paarweise disjunkt und ihrerseits Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{P}$ nach Definition 1.4. □

**1.14 Satz (Konstruktion des erzeugten Rings).** *Sei $\mathcal{P}$ ein Halbring über $X$ und $\mathcal{F}$ das System aller endlichen Vereinigungen $F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ von Mengen $P_i \in \mathcal{P}$. Dann ist $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{P}$ erzeugte Ring.*

Beweis: Jeder Ring $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ enthält nach Definition $\mathcal{F}$. Es ist also nur zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ ein Ring ist. Nun gilt $\emptyset \in \mathcal{F}$ und mit $E, F \in \mathcal{F}$ auch $E \cup F \in \mathcal{F}$. Ist $E = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ und $F = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j$ mit $P_i, Q_j \in \mathcal{P}$, so folgt

$$E \backslash F = \Big(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\Big) \backslash \Big(\bigcup_{j=1}^{l} Q_j\Big) = \bigcup_{i=1}^{k} \Big(P_i \backslash \bigcup_{j=1}^{l} Q_j\Big).$$

Die rechte Seite ist aber nach Lemma 1.13 als Vereinugung von Elementen aus $\mathcal{P}$ darstellbar und somit in $\mathcal{F}$. Damit ist der Satz bewiesen. □

**1.15 Folgerung (Zerlegungslemma).** *Sei $\mathcal{P}$ ein Halbring über $X$, und $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{P}$ erzeugte Ring. Zu jedem $F \in \mathcal{F}$ gibt es dann paarweise disjunkte Mengen $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{P}$ mit*

$$F = \bigcup_{j=1}^{k} P_j.$$

Beweis: Sei $F \in \mathcal{F}$. Nach Satz 1.14 gilt $F = \bigcup_{l=1}^{m} Q_l$ mit $Q_l \in \mathcal{P}$, also folgt die disjunkte Zerlegung

$$F = \bigcup_{l=1}^{m} \Big(Q_l \backslash \bigcup_{i=1}^{l-1} Q_i\Big).$$

Aufgrund von Lemma 1.13 besitzen Mengen der Form $Q \backslash \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ mit $Q, Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{P}$ die gewünschte disjunkte Zerlegung. □

**1.16 Satz (Fortsetzung auf den erzeugten Ring).** *Sei $\lambda$ ein Inhalt auf dem Halbring $\mathcal{P}$ und $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{P}$ erzeugte Ring. Dann gibt es genau einen Inhalt $\overline{\lambda} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ mit $\overline{\lambda}|_{\mathcal{P}} = \lambda$.*

Beweis: Ist $F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ mit $P_i \in \mathcal{P}$ paarweise disjunkt wie in Lemma 1.15, so muss für die Fortsetzung notwendig gelten

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i). \tag{1.17}$$

Deshalb ist die Fortsetzung eindeutig bestimmt. Wir wollen $\overline{\lambda}$ durch (1.17) definieren. Dazu ist zu zeigen, dass die rechte Seite nicht von der Wahl der Zerlegung abhängt. Sei $F = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j$ eine andere disjunkte Darstellung mit $Q_j \in \mathcal{P}$. Dann folgt

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda(Q_j) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i \cap Q_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \lambda(P_i \cap Q_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i).$$

Somit ist $\overline{\lambda}$ wohldefiniert. Für eine disjunkte Vereinigung $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ mit $F, F_i \in \mathcal{F}$ schreiben wir $F_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} P_{i,j}$ mit $P_{i,1}, \ldots, P_{i,m_i} \in \mathcal{P}$ paarweise disjunkt und erhalten

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda(P_{i,j}) = \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda}(F_i).$$

Also ist $\overline{\lambda}$ der gesuchte Inhalt. □