Die zweite Aussage folgt aus dem Transformationssatz, denn nach den Rechenregeln für die Determinante gilt

$$\det g = \det \big(D\varphi^\top D\varphi\big) = \big(\det D\varphi\big)^2.$$

□

8.17 Beispiel (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$). Betrachte für $U = (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$ und $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,z) : x \geq 0\}$ die Polarkoordinatenabbildung

$$\varphi : U \to V,\ \varphi(r,\vartheta,\varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi,\ r \sin\vartheta \sin\varphi,\ r\cos\vartheta).$$

Durch Bestimmung der Umkehrabbildung sieht man, dass φ diffeomorph ist. Die Jacobimatrix von φ lautet

$$D\varphi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\ \cos\varphi & r\ \cos\vartheta\ \cos\varphi & -r\ \sin\vartheta\ \sin\varphi \\ \sin\vartheta\ \sin\varphi & r\ \cos\vartheta\ \sin\varphi & r\ \sin\vartheta\ \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\ \sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich für die induzierte Metrik

$$\big(g_{ij}(r,\vartheta,\varphi)\big)_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Bogenlänge einer Kurve $\varphi \circ \gamma$ mit $\gamma(t) = \big(r(t),\vartheta(t),\varphi(t)\big)$ ist somit

$$L(\varphi\circ\gamma) = \int_I \sqrt{(r')^2 + r^2(\vartheta')^2 + r^2(\sin\vartheta)^2(\varphi')^2}.$$

Für das Lebesguemaß von $\varphi(E)$ für $E = [r_1,r_2] \times [\vartheta_1,\vartheta_2] \times [\varphi_1,\varphi_2]$ ergibt sich zum Beispiel

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^3\big(\varphi(E)\big) &= \int_{r_1}^{r_2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta dr \\ &= \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2)(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Allgemein wird durch Lemma 8.16 folgende Definition nahegelegt. Die Notation $\mu \llcorner \theta$ betzeichnet dabei das Maß mit Dichte θ, siehe Satz 6.3.

8.18 Definition (Riemannsches Volumen). *Sei g eine Riemannsche Metrik der Klasse C^0 auf U. Dann heißt $\mu_g = \mathcal{L}^n \llcorner \sqrt{\det g}$ (Riemannsches) Maß bezüglich g. Es gilt also*

$$\mu_g(E) = \int_E \sqrt{\det g}\, d\mathcal{L}^n \qquad \textit{für alle } \mathcal{L}^n\textit{-messbaren } E \subset U.$$

Es ist nun interessant, dass auch die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Laplace eine Riemannsche Verallgemeinerung besitzen.

8.19 Definition (Riemannsche Differentialoperatoren). *Sei g eine Riemannsche Metrik der Klasse C^1 auf $U \subset \mathbb{R}^n$ mit Koeffizientenmatrix $(g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, und $(g^{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die dazu inverse Matrix. Dann sind Gradient, Divergenz und Laplaceoperator bzgl. g wie folgt erklärt:*

$$\operatorname{grad}_g u = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(\partial_j u)\, e_i \qquad \text{für } u \in C^1(U),$$

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i=1}^n \partial_i(\sqrt{\det g}\ X_i) \qquad \text{für } X \in C^1(U, \mathbb{R}^n),$$

$$\Delta_g u = \operatorname{div}_g \operatorname{grad}_g u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^n \partial_i(\sqrt{\det g}\ g^{ij}\partial_j u) \qquad \text{für } u \in C^2(U).$$

Natürlich sind diese Definitionen noch erklärungsbedürftig. Für $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
g(x)\big(v, \operatorname{grad}_g u(x)\big) &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) v_i (\operatorname{grad}_g u(x))_j \\
&= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) v_i \sum_{k=1}^n g^{jk}(x)\, \partial_k u(x) \\
&= \sum_{i,k=1}^n v_i\, \partial_k u(x) \sum_{j=1}^n g_{ij}(x) g^{jk}(x) \\
&= \sum_{i=1}^n v_i\, \partial_i u(x),
\end{aligned}$$

da $\sum_{j=1}^n g_{ij}(x) g^{jk}(x) = \delta_{ik}$. Also ist $\operatorname{grad}_g u(x)$ der eindeutig bestimmte Vektor, der die Linearform $Du(x)$ bezüglich des Skalarprodukts $g(x)$ darstellt, das heißt es gilt:

$$g(x)\big(v, \operatorname{grad}_g u(x)\big) = Du(x)v \qquad \text{für alle } x \in U,\ v \in \mathbb{R}^n. \tag{8.20}$$

Für die Charakterisierung der Divergenz brauchen wir folgende Hilfsaussage.

8.21 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(U)$ mit $\int_U u\varphi\, d\mathcal{L}^n = 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Dann ist u die Nullfunktion.*

Beweis: Angenommen es gibt ein $x \in U$ mit $u(x) > 0$. Dann gibt es $\varrho > 0$ und $\delta > 0$ mit $u(x) \ge \delta$ auf $B_\varrho(x) \subset U$. Wähle eine Funktion $\eta \in C^\infty(U)$ mit $\operatorname{spt} \eta \subset B_{\varrho/2}(x)$, $\eta \ge 0$ und $\int_U \eta\, d\mathcal{L}^n > 0$. Aus der Monotonie des Integrals folgt

$$0 = \int_U u\eta \, d\mathcal{L}^n \geq \int_U \delta\eta \, d\mathcal{L}^n > 0,$$

ein Widerspruch. $\square$

8.22 Lemma (partielle Integration bzgl. g). *Sei g eine Riemannsche Metrik der Klasse C^1 auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\int_U \varphi \, \mathrm{div}_g X \, d\mu_g = -\int_U g(\mathrm{grad}_g \varphi, X) \, d\mu_g \quad \textit{für alle } \varphi \in C^1_c(U). \tag{8.23}$$

Die Funktion $\mathrm{div}_g X \in C^0(U)$ ist durch (8.23) eindeutig bestimmt.

Beweis: Erfüllen die Funktionen $u_i \in C^0(U)$, $i = 1, 2$, beide anstelle von $\mathrm{div}_g X$ die Gleichung (8.23), so ergibt Subtraktion, und Anwendung von Satz 6.3(3),

$$0 = \int_U \varphi(u_1 - u_2) \, d\mu_g = \int_U \varphi(u_1 - u_2)\sqrt{\det g} \, d\mathcal{L}^n \quad \text{für alle } \varphi \in C^0_c(U).$$

Aus Lemma 8.21 folgt $u_1 = u_2$. Um die Eigenschaft (8.23) zu beweisen, berechnen wir mit Satz 6.3(3), partieller Integration (Satz 7.16) und Gleichung (8.20)

$$\begin{aligned} \int_U \varphi \, \mathrm{div}_g X \, d\mu_g &= \int_U \varphi \sum_{i=1}^n \partial_i(\sqrt{\det g} X_i) \, d\mathcal{L}^n \\ &= -\int_U \sum_{i=1}^n \partial_i \varphi \, X_i \sqrt{\det g} \, d\mathcal{L}^n \\ &= -\int_U g(\mathrm{grad}_g \varphi, X) \, d\mu_g. \end{aligned}$$

$\square$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die gewünschten Transformationsformeln herleiten.

8.24 Satz (Transformation von Differentialoperatoren). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi \in C^2(U, V)$ ein Diffeomorphismus mit induzierter Metrik g. Dann gelten für $v \in C^1(V)$ bzw. $Y \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ folgende Aussagen:*

(1) $(\mathrm{grad} v) \circ \varphi = D\varphi \, \mathrm{grad}_g u$, *wobei* $u = v \circ \varphi$,

(2) $(\mathrm{div} Y) \circ \varphi = \mathrm{div}_g X$, *wobei* $D\varphi \, X = Y \circ \varphi$,

(3) $(\Delta v) \circ \varphi = \Delta_g u$, *falls* $v \in C^2(V)$ *und* $u = v \circ \varphi$.

Beweis: Mit Gleichung (8.20) und Definition 8.15 erhalten wir für $x \in U$

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{grad} v(\varphi(x)), D\varphi(x)e_j \rangle &= D(v \circ \varphi)(x)e_j \\ &= g(x)(e_j, \mathrm{grad}_g u(x)) \\ &= \langle D\varphi(x)e_j, D\varphi(x)\mathrm{grad}_g u(x) \rangle. \end{aligned}$$

Da die Vektoren $D\varphi(x)e_j$ für $j = 1, \dots, n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden, folgt (1). Hat $\psi : V \to \mathbb{R}$ kompakten Träger in V, so hat $\widetilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$ auch kompakten Träger in U. Mit partieller Integration (Satz 7.16), dem Transformationssatz (in Verbindung mit Satz 6.3(3)), Behauptung (1) und Lemma 8.22 erhalten wir deshalb für alle $\psi \in C^1_c(V)$

$$
\begin{aligned}
\int_V \psi \,\mathrm{div} Y \, d\mathcal{L}^n &= -\int_V \langle \mathrm{grad}\psi, Y\rangle \, d\mathcal{L}^n \\
&= -\int_U \langle \mathrm{grad}\psi \circ \varphi, Y \circ \varphi\rangle \, d\mu_g \\
&= -\int_U \langle D\varphi \cdot \mathrm{grad}_g \varphi, D\varphi \cdot X\rangle \, d\mu_g \\
&= -\int_U g(\mathrm{grad}_g \widetilde{\varphi}, X) \, d\mu_g \\
&= \int_U \widetilde{\varphi} \,\mathrm{div}_g X \, d\mu_g \\
&= \int_U \psi \, (\mathrm{div}_g X) \circ \varphi^{-1} \, d\mathcal{L}^n .
\end{aligned}
$$

Aus Lemma 8.21 folgt nun Behauptung (2). Schließlich ergibt sich aus (1) und (2)

$$(\Delta v) \circ \varphi = \big(\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, v)\big) \circ \varphi = \mathrm{div}_g \, \mathrm{grad}_g \, u.$$

□

8.25 Beispiel (Polarkoordinatendarstellung des Laplaceoperators). Für Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$, siehe Beispiel 8.17, ergibt sich bezüglich der induzierten Metrik g

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}_g u &= \partial_r u \, e_1 + \frac{1}{r^2} \partial_\vartheta u \, e_2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi u \, e_3, \\
\mathrm{div}_g X &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 X_1) + \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta X_2) + \partial_\varphi X_3, \\
\Delta_g u &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \, \partial_\vartheta u) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \, \partial_\varphi^2 u.
\end{aligned}
$$

Für $v(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ gilt zum Beispiel $u(r) = \frac{1}{r}$ und somit $\Delta v = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

9 Das Flächenmaß auf Untermannigfaltigkeiten

Hauptresultat dieses Abschnitts ist die Definition des Flächenmaßes für n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+k}$. Dazu wird zunächst der Flächeninhalt für Immersionen ad hoc definiert und an einigen Beispielen motiviert. Diese Definition wird dann mittels lokaler Parameterdarstellungen auf Untermannigfaltigkeiten übertragen. Als Anwendung wird die Aufspaltung von Gebietsintegralen bezüglich Radial- und Winkelkoordinaten, die sogenannte Zwiebelformel, behandelt.

Zur Definition des Flächeninhalts muss zunächst geklärt werden, was unter einer Fläche zu verstehen ist. Am einfachsten ist der Begriff der parametrisierten Fläche oder Immersion. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ heißt Immersion, wenn gilt:

$$\operatorname{rang} Df(x) = n \quad \text{bzw. äquivalent} \quad \ker Df(x) = \{0\} \quad \text{für alle } x \in U.$$

Die Vektoren $\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)$ bilden dann eine Basis des Unterraums $\operatorname{Bild} Df(x) \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Die Zahl n heißt Dimension, die Zahl k Kodimension von f. In Definition 8.15 wurde der Begriff der induzierten Metrik für Diffeomorphismen erklärt; diese Definition kann verbatim für Immersionen übernommen werden. Die induzierte Metik ist also gegeben durch

$$g(x)(v, w) = \langle Df(x)v, Df(x)w \rangle$$

bzw.

$$g(x) = \big(\langle \partial_i f(x), \partial_j f(x) \rangle\big)_{1 \leq i,j \leq n} = Df(x)^\top Df(x).$$

Wegen Lemma 8.16 (2) ist es naheliegend, den Flächeninhalt wie folgt zu definieren.

9.1 Definition (Flächenformel). *Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ eine n-dimensionale Immersion mit induzierter Metrik g, und $E \subset U$ sei $\mathcal{L}^n$-messbar. Der (n-dimensionale) Flächeninhalt von f auf E ist definiert durch*

$$A_E(f) = \int_E Jf \, d\mathcal{L}^n \quad \text{mit } Jf = \sqrt{\det g}.$$

Die Funktion Jf heißt Flächenintegrand oder Jacobische von f.

Als geometrische Größe sollte der Flächeninhalt nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängen. Dies wollen wir sofort überprüfen.

9.2 Satz (Invarianz des Flächeninhalts bei Umparametrisierungen). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in C^1(U,V)$ ein Diffeomorphismus und $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n+k})$ eine Immersion. Dann gilt*

$$A_{\varphi(E)}(f) = A_E(f \circ \varphi) \quad \text{für jede } \mathcal{L}^n\text{-messbare Menge } E \subset U.$$

BEWEIS: Seien g bzw. h die induzierten Metriken von $f \circ \varphi$ bzw. f. Es gilt

$$D(f \circ \varphi)^\top(x)\, D(f \circ \varphi)(x) = D\varphi(x)^\top\, Df(\varphi(x))^\top Df(\varphi(x))\, D\varphi(x),$$

beziehungsweise

$$g(x) = D\varphi(x)^\top\, h(\varphi(x))\, D\varphi(x). \tag{9.3}$$

Mit den Rechenregeln für die Determinante ergibt sich

$$J(f \circ \varphi) = (Jf) \circ \varphi\, |\det D\varphi|. \tag{9.4}$$

Die Behauptung folgt damit aus dem Transformationssatz, Satz 8.6. □

Wir wollen nun einige Spezialfälle betrachten.

9.5 Beispiel. Für $k = 0$, also $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sprechen wir statt vom n-dimensionalen Flächeninhalt vom Volumen $\mathrm{vol}_E(f)$. Die Abbildung f ist genau dann eine Immersion, wenn $\det Df(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, das heißt f ist lokal diffeomorph. Es gilt $Jf = \sqrt{\det(Df^\top Df)} = |\det Df|$. Ist zusätzlich $f : U \to f(U)$ injektiv und damit diffeomorph, so besagt der Transformationssatz

$$\mathcal{L}^n(f(E)) = \int_E |\det Df|\, d\mathcal{L}^n = \mathrm{vol}_E(f).$$

Im allgemeinen ist $\mathrm{vol}_E(f)$ nicht das $\mathcal{L}^n$-Maß des Bildes $f(E)$, sondern die Bildpunkte werden mit der Vielfachheit gezählt, mit der sie angenommen werden.

9.6 Beispiel. Eine eindimensionale Immersion $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}^{1+k}$ heißt auch reguläre Kurve. Nach Definition 9.1 ist ihre Länge $L(f)$ gegeben durch

$$L(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt.$$

Analog zu Beispiel 9.5 wird hier die Länge des Bildes ebenfalls mit der Vielfachheit gezählt, mit der es durchlaufen wird. Zum Beispiel gilt $L_{[0,3\pi]}(f) = 3\pi$ für $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

9.7 Beispiel. Eine zweidimensionale Immersion $f : U \to \mathbb{R}^3$, $f = f(x,y)$, heißt auch reguläre Fläche. Es gilt, wenn $\wedge$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet,

$$Jf = \sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle^2} = \left|\frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

Betrachte zum Beispiel Polarkoordinaten auf der Sphäre, i.e.

$$f : U = (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3,\ f(\vartheta,\varphi) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta).$$

Es gilt $\frac{\partial f}{\partial \vartheta} \wedge \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\vartheta,\varphi) = (\sin\vartheta)\, f(\vartheta,\varphi) \neq 0$ für alle $(\vartheta,\varphi) \in U$. Also ist f eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$, mit Flächeninhalt

$$A(f) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta = 4\pi.$$

9.8 Beispiel. Für $u \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$ ist die Graphenabbildung

$$f : U \to \mathbb{R}^{n+k},\ f(x) = (x, u(x)),$$

eine n-dimensionale Immersion. Denn bezeichnet $p : \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten, so gilt $p \circ f = \mathrm{id}_U$, also nach Kettenregel $p\,Df(x) = D(p \circ f)(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, das heißt $Df(x)$ ist injektiv. Man berechnet

$$\langle \partial_i f, \partial_j f\rangle = \big\langle (e_i, \partial_i u), (e_j, \partial_j u)\big\rangle = \delta_{ij} + \langle \partial_i u, \partial_j u\rangle.$$

Also folgt für den Flächeninhalt von f

$$A(f) = \int_U \sqrt{\det\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} + Du^\top Du\big)}\, d\mathcal{L}^n.$$

In Kodimension $k = 1$ können wir zu $x \in U$ eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ wählen, so dass $Du(x)v_j = 0$ für $j = 2, \ldots, n$ und $Du(x)v_1 = |Du(x)|$. Es ergibt sich also

$$Jf = \sqrt{1 + |Du|^2} \quad \text{für } f : U \to \mathbb{R}^{n+1},\ f(x) = (x, u(x)), u \in C^1(U). \tag{9.9}$$

Wir wollen nun einen globaleren Standpunkt einnehmen und Flächen betrachten, die nicht bzw. nicht a priori durch eine einzige Parametrisierung gegeben sind. Unser Ziel ist es, auf diesen Flächen – genauer: Untermannigfaltigkeiten – ein n-dimensionales Flächenmaß zu definieren.

9.10 Satz (Untermannigfaltigkeitskriterien). *Sei $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Für $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) Plättbarkeitskriterium: *zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : W \to \varphi(W) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit*

$$\varphi(M \cap W) = \{z \in \varphi(W) : z_{n+1} = \ldots = z_{n+k} = 0\}.$$

(2) Niveaumengenkriterium: *Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und eine Funktion $h \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$ mit* $\operatorname{rang} Dh(q) = k$ *für alle $q \in W$, so dass*

$$M \cap W = \{q \in W : h(q) = 0\}.$$

(3) Graphenkriterium: *Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Euklidische Bewegung B des $\mathbb{R}^{n+k}$ mit $B(0) = p$, offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ mit $0 \in U \times V$ und eine C^1-Funktion $u : U \to V$ mit $u(0) = 0$, so dass mit $W = B(U \times V)$ gilt:*

$$M \cap W = B\big(\{(x, u(x)) : x \in U\}\big).$$

M heißt n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+k}$, wenn eines (und damit jedes) der drei Kriterien erfüllt ist.

Beweis: Wir zeigen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Sei zu $p \in M$ ein Diffeomorphismus $\varphi : W \to \varphi(W)$ wie in (1) gewählt. Dann ist $D\varphi(q) \in \mathrm{GL}_{n+k}(\mathbb{R})$ für alle $q \in W$. Setze $h = \pi^\perp \circ \varphi : W \to \mathbb{R}^k$, wobei $\pi^\perp : \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die Orthogonalprojektion bezeichnet. Es folgt $\operatorname{rang} Dh(q) = \operatorname{rang}(\pi^\perp D\varphi(q)) = k$ für alle $q \in W$, und weiter

$$\begin{aligned}\{q \in W : h(q) = 0\} &= \{q \in W : \varphi_{n+1}(q) = \ldots = \varphi_{n+k}(q) = 0\}\\ &= \varphi^{-1}(\{z \in \varphi(W) : z_{n+1} = \ldots = z_{n+k} = 0\})\\ &= M \cap W.\end{aligned}$$

Als nächstes gelte die Niveaumengenbeschreibung, das heißt wir können zu $p \in M$ eine Funktion $h \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$ wie in (2) wählen. Wir nehmen zunächst an, dass die Vektoren $\partial_{n+1} h(p), \ldots, \partial_{n+k} h(p)$ linear unabhängig sind; außerdem sei $p = 0$. Nach dem Satz über impliziten Funktionen gibt es dann offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ sowie eine C^1-Funktion $u : U \to V$, so dass gilt:

$$M \cap (U \times V) = \{(x, u(x) : x \in U\}.$$

Damit gilt (3) mit $B = \mathrm{id}$. Allgemein existiert wegen $\operatorname{rang} Dh(p) = k$ eine Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_{n+k}$, so dass die Vektoren $\partial_{\sigma(j)} h(p)$ für $j = n+1, \ldots, n+k$ linear unabhängig sind. Setze dann $B(z) = p + Sz$, wobei $Se_j = e_{\sigma(j)}$ für $j = 1, \ldots, n+k$, und betrachte $\widetilde{M} = B^{-1}(M)$ und $\widetilde{h} = h \circ B$. Wegen $\partial_j \widetilde{h}(0) = Dh(p) Se_j = \partial_{\sigma(j)} h(p)$ können wir das obige Argument anwenden und erhalten $u : U \to V$ wie verlangt mit $\widetilde{M} \cap (U \times V) = \{(x, u(x)) : x \in U\}$, also

$$M \cap B(U \times V) = B\big(\{(x, u(x)) : x \in U\}\big).$$

Sei schließlich zu $p \in M$ eine Graphendarstellung wie in (3) gegeben, zunächst mit $p = 0$ und $B = \mathrm{id}$. Betrachte dann die Injektion $\varphi : U \times V \to \varphi(U \times V)$, $\varphi(x, z) = (x, z - u(x))$. Es gilt

$$D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -Du(x) & E_k \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+k}(\mathbb{R}).$$

Somit ist φ Diffeomorphismus auf sein Bild, und es folgt aus (3)

$$\begin{aligned} \varphi(M \cap (U \times V)) &= \varphi(\{(x,u(x)) : x \in U\}) \\ &= \{z \in \varphi(U \times V) : z_{n+1} = \ldots = z_{n+k} = 0\}. \end{aligned}$$

Sind p, B beliebig, also $B(z) = p + Sz$ mit $S \in \mathbb{O}(n+k)$, so wenden wir das obige Argument an auf $\widetilde{M} = B^{-1}(M)$ und erhalten den entsprechenden Diffeomorphismus $\widetilde{\varphi} : U \times V \to \widetilde{\varphi}(U \times V)$. Mit $W = B(U \times V)$ und $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ B^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned} \varphi(M \cap W) &= \widetilde{\varphi}(\widetilde{M} \cap (U \times V)) \\ &= \{z \in \widetilde{\varphi}(U \times V) : z_{n+1} = \ldots = z_{n+k} = 0\} \\ &= \{z \in \varphi(W) : z_{n+1} = \ldots = z_{n+k} = 0\}. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

9.11 Beispiel. Die Sphäre $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\}$ ist eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ der Dimension n, denn für jedes $p \in \mathbb{S}^n$ können wir im Niveaumengenkriterium $W = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ und $h(q) = |q|^2 - 1$ wählen:

$$Dh(q) = 2q \neq 0 \text{ auf } W \quad \text{ und } \quad \mathbb{S}^n \cap W = \mathbb{S}^n = \{q \in W : h(q) = 0\}.$$

Wir brauchen nun einige topologische Tatsachen. Jede Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist, versehen mit dem üblichen Euklidischen Abstand $d(p,q) = |p - q|$ für $p, q \in M$, ein metrischer Raum. Damit ist der Begriff der offenen Menge in M erklärt: $V \subset M$ heißt offen in M (oder offen bzgl. der Relativtopologie von M), wenn es zu jedem $p \in V$ ein $\varrho > 0$ gibt mit $M \cap B_\varrho(p) \subset V$.

9.12 Lemma (zur Relativtopologie). *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$.*

(1) *Eine Menge $V \subset M$ ist genau dann offen in M, wenn es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ gibt mit $V = M \cap W$.*

(2) *Eine Menge $K \subset M$ ist genau dann kompakt in M, wenn K kompakt ist in $\mathbb{R}^{n+k}$.*

Beweis: Sei $V \subset M$ offen in M. Dann gibt es zu jedem $p \in V$ ein $\varrho(p) > 0$ mit $M \cap B_{\varrho(p)} \subset V$. Die Menge $W = \bigcup_{p \in V} B_{\varrho(p)}(p)$ ist offen in $\mathbb{R}^{n+k}$ und es gilt

$$M \cap W = \bigcup_{p \in V} M \cap B_{\varrho(p)}(p) = V.$$

Ist umgekehrt die offene Menge $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ gegeben, so wähle zu $p \in V := M \cap W$ ein $\varrho > 0$ mit $B_\varrho(p) \subset W$, und erhalte $M \cap B_\varrho(p) \subset M \cap W = V$. Aussage (2) folgt mit (1) aus der Definition der Überdeckungskompaktheit. □