9.13 Satz (σ-Kompaktheit von Untermannigfaltigkeiten). *Jede n-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist als abzählbare Vereinigung $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ von kompakten Mengen darstellbar.*

Beweis: Wir überlegen zuerst, dass es in M eine abzählbare, dichte Teilmenge gibt. Dazu betrachten wir zum Beispiel die Würfel $Q_{j,k} = 2^{-k}(j + [0,1]^n)$ mit $j \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$, und wählen Punkte $p_{j,k} \in M \cap Q_{j,k}$, falls dieser Schnitt nicht leer ist.
Setze $r(p) = \frac{1}{2}\sup\{r > 0 : M \cap \overline{B_r(p)} \text{ ist kompakt}\}$ für $p \in M$. Es gilt $r(p) > 0$ nach dem Niveaumengenkriterium, Satz 9.10 (2). Aus der Dreiecksungleichung folgt $\overline{B_r(p_2)} \subset \overline{B_s(p_1)}$ für $s \geq r + |p_1 - p_2|$. Ist nun $M \cap \overline{B_s(p_1)}$ kompakt, so ist $M \cap \overline{B_r(p_2)}$ gleichfalls kompakt, als Schnitt der kompakten Mengen $M \cap \overline{B_s(p_1)}$ und $\overline{B_r(p_2)}$. Aus der Definition von $r(p)$ folgt somit

$$r(p_2) \geq r(p_1) - \frac{1}{2}|p_1 - p_2|.$$

Sei $\{p_i : i \in \mathbb{N}\} \subset M$ eine abzählbare, dichte Teilmenge. Wir behaupten, dass M durch die kompakten Mengen $K_i = M \cap \overline{B_{r(p_i)}(p_i)}$ ausgeschöpft wird. Denn für jedes $p \in M$ gibt es eine Teilfolge $p_{i_\nu} \to p$, und es gilt $r(p_{i_\nu}) \geq r(p) - \frac{1}{2}|p - p_{i_\nu}| \to r(p) > 0$, also folgt $p \in \overline{B_{r(p_{i_\nu})}(p_{i_\nu})}$ für ν hinreichend groß. □

Unser Plan ist nun, die gegebene Mannigfaltigkeit lokal durch Immersionen zu beschreiben und den Flächeninhalt lokal durch die Flächenformel, Definition 9.1, zu berechnen.

9.14 Definition (lokale Parametrisierung). *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Eine lokale Parametrisierung von M ist eine injektive C^1-Immersion*

$$f : U \to M \subset \mathbb{R}^{n+k} \qquad (U \text{ offen in } \mathbb{R}^n).$$

9.15 Satz (Eigenschaften lokaler Parametrisierungen). *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ der Klasse C^1. Dann gilt:*

(1) *Ist $f : U \to M$ eine lokale Parametrisierung von M, so ist $V = f(U)$ offen in M und $f^{-1} : V \to U$ ist stetig, also $f : U \to V$ homeomorph.*

(2) *Für lokale Parametrisierungen $f_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, ist der Parameterwechsel $f_2^{-1} \circ f_1 : f_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to f_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ ein C^1-Diffeomorphismus.*

Beweis: Wir zeigen (1) zunächst unter der Annahme $V \subset W$, wobei $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen und $\varphi(M \cap W) = \mathbb{R}^n \cap \varphi(W)$ für einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : W \to \varphi(W)$. Dann ist die Abbildung $\varphi \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ definiert, injektiv und es gilt

$$\operatorname{rang} D(\varphi \circ f)(x) = \operatorname{rang} \big(D\varphi(f(x))\, Df(x)\big) = n \qquad \text{für alle } x \in U.$$

Also ist $Y = (\varphi \circ f)(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\varphi \circ f : U \to Y$ ist ein C^1-Diffeomorphismus. Folglich ist $Z = (Y \times \mathbb{R}^k) \cap \varphi(W)$ offen in $\mathbb{R}^{n+k}$ mit $\mathbb{R}^n \cap Z = Y$. Wegen $V = \varphi^{-1}(Y)$ folgt

$$V = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \cap Z) = \varphi^{-1}\big(\mathbb{R}^n \cap \varphi(W)\big) \cap \varphi^{-1}(Z) = M \cap \varphi^{-1}(Z),$$

wobei zuletzt $\mathbb{R}^n \cap \varphi(W) = \varphi(M \cap W)$ benutzt wurde. Somit ist V relativ offen in M nach Lemma 9.12, und $f^{-1} = (\varphi \circ f)^{-1}\,\varphi|_V$ ist stetig. Für V beliebig wählen wir zu $p \in V$ eine Plättung $\varphi : W \to \varphi(W)$ mit $p \in W$ wie in Satz 9.10(1), und wenden das obige Argument an auf $\widetilde{U} = U \cap \varphi^{-1}(W)$ sowie $\widetilde{f} = f|_{\widetilde{U}}$. Dann ist $\widetilde{V} = f(\widetilde{U})$ offen in M mit $p \in \widetilde{V}$, und $f^{-1}|_{\widetilde{V}} = (f|_{\widetilde{U}})^{-1}$ ist auf $\widetilde{V}$ stetig.
Für (2) können wir ebenfalls annehmen, dass $V_i \subset W$ für $i = 1, 2$, wobei $\varphi : W \to \varphi(W)$ Diffeomorphismus mit $\varphi(M \cap W) = \mathbb{R}^n \cap \varphi(W)$. Dann sind die Abbildungen

$$\varphi \circ f_i : f_i^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \varphi(V_1 \cap V_2)$$

diffeomorph, also auch $f_2^{-1} \circ f_1 = (\varphi \circ f_2)^{-1} \circ (\varphi \circ f_1)$. □

9.16 Folgerung (Existenz eines abzählbaren Atlas). *Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ besitzt einen abzählbaren Atlas, das heißt ein System von lokalen Parametrisierungen $f_i : U_i \to f(U_i) = V_i$, $i \in \mathbb{N}$, mit $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$.*

Beweis: Zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Parametrisierung $f : U \to V$ mit $p \in V$, zum Beispiel können wir $f = \varphi^{-1}|_{\varphi(W) \cap \mathbb{R}^n}$ wählen, wobei $\varphi : W \to \varphi(W)$ eine lokale Plättung wie in Satz 9.10 (1) ist. Da ein Kartengebiet $V = f(U)$ offen ist nach Satz 9.15 (1), wird jede kompakte Menge $K \subset M$ durch endlich viele Kartengebiete überdeckt. Die Behauptung folgt mit Satz 9.13. □

9.17 Definition (Tangentialvektor). *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ heißt Tangentialvektor von $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ in p, wenn es eine Abbildung $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.*

9.18 Folgerung (Existenz des Tangentialraums). *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann ist die Menge aller Tangentialvektoren von M in p ein n-dimensionaler Unterraum, der Tangentialraum T_pM.*

Beweis: Sei $M \cap W = \{q \in W : h(q) = 0\}$ eine Niveaumengenbeschreibung auf einer Umgebung W von p nach Satz 9.10 (2). Ist $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ Tangentialvektor in p und γ wie in Definition 9.17, so folgt $h(\gamma(t)) = 0$ nahe bei $t = 0$, also

$$0 = \frac{d}{dt}\, h(\gamma(t))|_{t=0} = Dh(\gamma(0))\gamma'(0) = Dh(p)v.$$

Ist andererseits $f: U \to V$ eine lokale Parametrisierung mit $f(x_0) = p$, so folgt

$$Df(x_0)e_i = \frac{d}{dt} f(x_0 + te_i)|_{t=0} \in T_pM \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Aus Dimensionsgründen muss $\operatorname{Bild} Df(x_0) = T_pM = \ker Dh(p)$ gelten. $\square$

9.19 Satz (Definition des Flächenmaßes). *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, und $\mathcal{E}$ das System aller $E \subset M$, für die gilt:*

$$f^{-1}(E \cap V) \textit{ ist } \mathcal{L}^n\textit{-messbar für jede lokale Parametrisierung } f: U \to V.$$

Dann gibt es genau ein reguläres Maß ω auf M mit folgenden Eigenschaften:

(1) *Das System der ω-messbaren Mengen ist $\mathcal{E}$.*

(2) *Ist $f: U \to V$ lokale Parametrisierung und $E \in \mathcal{E}$ mit $E \subset V$, so gilt*

$$\omega(E) = \int_{f^{-1}(E)} Jf \, d\mathcal{L}^n.$$

Beweis: Das System $\mathcal{E}$ enthält alle offenen Mengen $\Omega \subset M$, denn für eine lokale Parametrisierung $f: U \to V$ ist $V \subset M$ offen nach Satz 9.15 (1), also ist auch $f^{-1}(\Omega \cap V)$ offen und damit $\mathcal{L}^n$-messbar nach Satz 4.6. Weiter gilt

$$f^{-1}((M \backslash E) \cap V) = U \backslash f^{-1}(E \cap V) \quad \text{und} \quad f^{-1}\big((\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \cap V\big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i \cap V).$$

Also ist $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra. Wähle nun mit Folgerung 9.16 ein System von lokalen Parametrisierungen $f_i : U_i \to V_i$, $i \in \mathbb{N}$, mit $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$. Die Mengen $M_i = V_i \backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \in \mathcal{E}$ sind dann paarweise disjunkt. Ist ω ein Maß mit den verlangten Eigenschaften, so folgt für $E \in \mathcal{E}$

$$\omega(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega(E \cap M_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(E \cap M_i)} Jf_i \, d\mathcal{L}^n. \tag{9.20}$$

Aber nach Voraussetzung gilt $\omega(S) = \inf_{E \in \mathcal{E},\, E \supset S} \omega(E)$ für jede Menge $S \subset M$, also ist das Maß ω eindeutig bestimmt.
Für die Existenz zeigen wir, dass durch (9.20) ein Prämaß auf $\mathcal{E}$ gegeben ist: sind $E_j \in \mathcal{E}$, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{E}$, so folgt

$$\omega(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(E \cap M_i)} Jf_i \, d\mathcal{L}^n = \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(E_j \cap M_i)} Jf_i \, d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^{\infty} \omega(E_j).$$

Mit Satz 3.4 erhalten wir die Caratheodory-Fortsetzung, die wir ebenfalls mit ω bezeichnen. Alle Mengen in $\mathcal{E}$ sind ω-messbar. Sei $f: U \to V$ lokale Parametrisierung und $E \in \mathcal{E}$ mit $E \subset V$. Nach Satz 9.15 (2) ist dann

$\varphi_i = f_i^{-1} \circ f : f^{-1}(V \cap V_i) \to f_i^{-1}(V \cap V_i)$ ein C^1-Diffeomorphismus, und aus Satz 9.2 folgt

$$\begin{aligned}\omega(E) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(E \cap M_i)} Jf_i \, d\mathcal{L}^n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi_i(f^{-1}(E \cap M_i))} Jf_i \, d\mathcal{L}^n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f^{-1}(E \cap M_i)} J(f_i \circ \varphi_i) \, d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{f^{-1}(E)} Jf \, d\mathcal{L}^n.\end{aligned}$$

Es bleibt, die σ-Algebra der ω-messbaren Mengen zu bestimmen. Für $K \subset U_i$ kompakt gilt $\omega(f_i(K)) = \int_K Jf_i \, d\mathcal{L}^n < \infty$. Da sich jede Menge U_i durch abzählbar viele kompakte Mengen ausschöpfen lässt, ist ω ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{E}$. Nach Satz 3.16 gibt es dann zu jeder ω-messbaren Menge $D \subset M$ Mengen $C, E \in \mathcal{E}$ mit $C \subset D \subset E$ und $\omega(E \backslash C) = 0$. Es folgt für eine lokale Parametrisierung $f : U \to V$

$$0 = \omega((E \backslash C) \cap V) = \int_{f^{-1}((E \backslash C) \cap V)} Jf \, d\mathcal{L}^n.$$

Somit ist $f^{-1}\big((E \backslash C) \cap V\big)$ eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge. Also ist auch $f^{-1}\big((D \backslash C) \cap V\big)$ eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge, insbesondere $\mathcal{L}^n$-messbar. Wegen $f^{-1}(D \cap V) = f^{-1}(C \cap V) \cup f^{-1}\big((D \backslash C) \cap V\big)$ folgt $D \in \mathcal{E}$. $\square$

9.21 Bemerkung. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und $u \colon M \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion bzgl. des Oberflächenmaßes ω. Ist $f : U \to V$ lokale Parametrisierung, so gilt*

$$\int_V u \, d\omega = \int_{f^{-1}(V)} u \circ f \; Jf \, d\mathcal{L}^n. \tag{9.22}$$

Die Formel gilt offensichtlich für charakteristische Funktionen $u = \chi_B$ mit $B \subset V$ ω-messbar. Durch Approximation mit Treppenfunktionen von unten, siehe 5.13, ergibt sich (9.22) dann für $u \geq 0$, und schließlich durch Zerlegung in u^+ und u^- für beliebige ω-integrierbare u. Eine globale Formel ergibt sich analog zu (9.20), d.h. mit $M_i = V_i \backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$ gilt

$$\int_M u \, d\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(M_i)} u \circ f_i \; Jf_i \, d\mathcal{L}^n.$$

Im allgemeinen werden nicht unendlich viele Parametrisierungen benötigt, um ein Flächenintegral auszurechnen. Zum Beispiel kann man zeigen, dass jede kompakte Untermannigfaltigkeit bis auf eine ω-Nullmenge durch eine einzige Parametrisierung erfasst werden kann.

Die gegebene Definition des Flächenmaßes ist gut geeignet, um auf einer festen Untermannigfaltigkeit M das Maß von Teilmengen bzw. Integrale von Funktionen zu berechnen. Dagegen ist die Konstruktion unpraktisch, wenn Aussagen über Folgen von Untermannigfaltigkeiten benötigt werden. Es kann auf $\mathbb{R}^{n+k}$ ein Maß $\mathcal{H}^n$ definiert werden – das n-dimensionale Hausdorffmaß –, so dass die Einschränkung auf jede n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M das jeweilige Flächenmaß ω_M ergibt. Die Flächenformel ergibt sich bei diesem Zugang als Satz. Wir sind hier von der Flächenformel als Definition ausgegangen, um sofort Beispiele von Flächeninhalten ausrechnen zu können.

9.23 Lemma (Transformation des Flächeninhalts unter Ähnlichkeiten). *Betrachte $\varphi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$, $\varphi(x) = \lambda T(x + a)$, für $\lambda > 0$, $T \in \mathbb{O}(n+k)$ und $a \in \mathbb{R}^{n+k}$. Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit, so ist $N = \varphi(M)$ auch eine C^1-Untermannigfaltigkeit, und für die zugehörigen Maße ω_M bzw. ω_N gilt:*

(1) *$\omega_N(\varphi(A)) = \lambda^n \omega_M(A)$ für alle ω_M-messbaren $A \subset M$,*

(2) *$\int_N u \, d\omega_N = \lambda^n \int_M u \circ \varphi \, d\omega_M$, falls u ω_N-messbar ist und eines der Integrale existiert.*

Beweis: Es ist leicht zu sehen, dass N eine C^1-Untermannigfaltigkeit ist. Ist $f : U \to V$ lokale Parametrisierung von M, so ist $\varphi \circ f : U \to \varphi(V)$ lokale Parametrisierung von N und für $A \subset M$ gilt

$$(\varphi \circ f)^{-1}(\varphi(A) \cap \varphi(V)) = f^{-1}(A \cap V).$$

Nach Satz 9.19 ist also $A \subset M$ genau dann ω_M-messbar, wenn $\varphi(A)$ ω_N-messbar ist. Zum Beweis von (1) können wir mittels Zerlegung wie in (9.20) annehmen, dass $A \subset V$ für eine lokale Parametrisierung $f : U \to V$. Es gilt

$$\begin{aligned} D(\varphi \circ f)^\top(x) \, D(\varphi \circ f)(x) &= Df^\top(x) \, D\varphi^\top(f(x)) \, D\varphi(f(x)) \, Df(x) \\ &= \lambda^2 \, Df^\top(x) Df(x). \end{aligned}$$

Mit Satz 9.19 folgt

$$\omega_N(\varphi(A)) = \int_{(\varphi \circ f)^{-1}(\varphi(A))} J(\varphi \circ f) \, d\mathcal{L}^n = \lambda^n \int_{f^{-1}(A)} Jf \, d\mathcal{L}^n = \lambda^n \omega_M(A).$$

Für $u = \chi_B$ mit $B \subset N$ ω_N-messbar folgt (2) aus (1). Durch Approximation mit Treppenfunktionen von unten, siehe 5.13, ergibt sich (2) dann für $u \geq 0$, und schließlich durch Zerlegung in u^+ und u^- für beliebige ω_N-messbare u. $\square$

9.24 Satz (Zwiebelformel). *Sei ω_r das Oberflächenmaß auf $\partial B_r = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = r\}$. Für $u \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ ist $u|_{\partial B_r} \in L^1(\omega_r)$ für $\mathcal{L}^1$-fast-alle $r > 0$ und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} u\, d\mathcal{L}^{n+1} = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} u(p)\, d\omega_r(p)\, dr = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^n} r^n u(r\xi)\, d\omega(\xi)\, dr.$$

BEWEIS: Sei $f : U \to V \subset \mathbb{S}^n$ eine lokale Parametrisierung, und $C(V) = \{r\xi : \xi \in V, r > 0\}$ der Kegel über V. Betrachte den Diffeomorphismus $\varphi : (0,\infty) \times U \to C(V)$, $\varphi(r,x) = rf(x)$, mit induziertem Skalarprodukt

$${}^tD\varphi(r,x)D\varphi(r,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 g(x) \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f\rangle \text{ für } 1 \leq i,j \leq n.$$

Ist $E = f(A)$ für $\mathcal{L}^n$-messbares $A \subset U$ und $C(E)$ der Kegel über E, so folgt aus dem Transformationssatz

$$\begin{aligned} \int_{C(E)} u\, d\mathcal{L}^{n+1} &= \int_{(0,\infty)\times A} u\big(rf(x)\big)\, r^n \sqrt{\det g(x)}\, d\mathcal{L}^{n+1}(r,x) \\ &= \int_0^\infty r^n \int_A u\big(rf(x)\big) \sqrt{\det g(x)}\, dx\, dr \\ &= \int_0^\infty r^n \int_E u(r\xi)\, d\omega(\xi)\, dr \\ &= \int_0^\infty \int_{\{r\xi : \xi \in E\}} u(p)\, d\omega_r(p)\, dr, \end{aligned}$$

wobei zuletzt Lemma 9.23 benutzt wurde. Wähle nun eine Zerlegung $\mathbb{S}^n = \bigcup_{j=1}^N E_j$ mit $E_j \subset V_j$, wobei $f_j : U_j \to V_j$ lokale Parametrisierung. Durch Addition folgt die Behauptung. □

9.25 Beispiel. Mit $u = \chi_{B_1(0)}$ folgt für den Flächeninhalt ω_n der n-dimensionalen Sphäre

$$\alpha_{n+1} = \mathcal{L}^{n+1}(B_1(0)) = \int_0^1 \omega_r(\partial B_r)\, dr = \int_0^1 \omega_n r^n\, dr = \frac{\omega_n}{n+1},$$

also zum Beispiel $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$ und $\omega_3 = 2\pi^2$, vgl. Beispiel 7.11.