10 Der Integralsatz von Gauß

In diesem Abschnitt beweisen wir den Integralsatz von Gauß, die mehrdimensionale Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Aussage des Satzes ist, unter geeigneten technischen Voraussetzungen, die Formel

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\omega.$$

Dabei ist X ein Vektorfeld und ν die äußere Einheitsnormale auf dem Rand des Gebiets Ω im $\mathbb{R}^n$. In der Flüssigkeitsdynamik und der Elektrodynamik wird die Divergenz als Quellenstärke und das Randintegral als Fluss des Vektorfelds durch $\partial\Omega$ interpretiert. Aus dem Satz folgen dann entsprechende Erhaltungsgesetze. Wir beweisen den Satz für Mengen mit C^1-Rand.

Zuerst behandeln wir heuristisch den einfachen Fall, dass das zugrundeliegende Gebiet ein n-dimensionaler Quader Q ist, das heißt $Q = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Die äußere Einheitsnormale sollte außerhalb der niederdimensionalen Kanten wie folgt gegeben sein:

$$\nu(x) = \begin{cases} -e_i & \text{für } x \in \partial Q \text{ mit } x_i = a_i \\ e_i & \text{für } x \in \partial Q \text{ mit } x_i = b_i. \end{cases}$$

Wir setzen $Q_i = (a_1, b_1) \times \ldots \times \widehat{(a_i, b_i)} \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, wobei das Dach bedeutet, dass der Term wegzulassen ist. Für ein hinreichend glattes Vektorfeld $X : \overline{Q} \to \mathbb{R}^n$ berechnen wir dann mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}
\int_Q \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^n &= \sum_{i=1}^n \int_Q \partial_i X_i \, d\mathcal{L}^n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{Q_i} \int_{a_i}^{b_i} \partial_i X_i(x) \, dx_i \; dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{Q_i} X_i(x_1, \dots, b_i, \dots, x_n) \, dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_{Q_i} X_i(x_1, \dots, a_i, \dots, x_n) \, dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\{x \in \partial Q : x_i = b_i\}} \langle X(x), e_i \rangle \, d\omega(x) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_{\{x \in \partial Q : x_i = a_i\}} \langle X(x), e_i \rangle \, d\omega(x) \\
&= \int_{\partial Q} \langle X, \nu \rangle \, d\omega.
\end{aligned}$$

Aber wir wollen natürlich die Aussage nicht nur für Quader zur Verfügung haben. Eine geeignete Klasse von Gebieten wird in folgendem Satz definiert. Der Beweis ist analog zu Satz 9.10 und soll als Übungsaufgabe durchgeführt werden.

10.1 Satz (Kriterien für C^1-Rand). *Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Zu jedem $p \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : W \to \varphi(W)$ mit*

$$\varphi(\Omega \cap W) = \mathbb{H}^n \cap \varphi(W), \quad \textit{wobei } \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0).$$

(2) *Zu jedem $p \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $h \in C^1(W)$ mit $Dh(q) \neq 0$ für alle $q \in W$, so dass*

$$\Omega \cap W = \{q \in W : h(q) < 0\}.$$

(3) *Zu jedem $p \in \partial\Omega$ gibt es eine Bewegung B des $\mathbb{R}^n$ mit $B(0) = p$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in U \times I$ und eine C^1-Funktion $u : U \to I$ mit $u(0) = 0$, so dass mit $W = B(U \times I)$ gilt:*

$$\Omega \cap W = B\big(\{(x, y) \in U \times I : y < u(x)\}\big).$$

Die Menge Ω hat C^1-Rand, wenn eines (und damit jedes) der drei Kriterien erfüllt ist.

In diesem Kapitel arbeiten wir ausschließlich mit dem Subgraphenkriterium (3). Anschaulich hat eine Menge C^1-Rand, wenn ihr Rand eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, und die Menge lokal auf einer Seite des Randes liegt. Dies wird in folgendem Lemma präzisiert.

10.2 Lemma. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand. Zu $p \in \partial\Omega$ seien $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $u : U \to I$ wie in Satz 10.1 (3) gewählt, und $W = B(U \times I)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap W &= B\big(\{(x,y) \in U \times I : y = u(x)\}\big), \\ (\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}) \cap W &= B\big(\{(x,y) \in U \times I : y > u(x)\}\big). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ nach dem Graphenkriterium in Satz 9.10.

Beweis: Es reicht, die Aussage für $\partial\Omega$ zu zeigen. Für $q \in \partial\Omega \cap W$ ist $(x,y) := B^{-1}(q) \in U \times I$. Es gilt $y \geq u(x)$ wegen $q \notin \Omega$. Andererseits gibt es $q_j \in \Omega$ mit $q_j \to q$. Für $(x_j, y_j) := B^{-1}(q_j)$ folgt $y_j < u(x_j)$ und $(x_j, y_j) \to (x,y)$, also $y \leq u(x)$. Für die umgekehrte Inklusion sei $x \in U$. Dann gilt $B(x, u(x) - \varepsilon) \in \Omega$ bzw. $B(x, u(x) + \varepsilon) \notin \Omega$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Es folgt $B(x, u(x)) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} B(x, u(x) \pm \varepsilon) \in \partial\Omega \cap W$. □

10.3 Beispiel. Der Halbraum $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0)$ hat C^1-Rand, denn in Satz 10.1(3) können wir $u : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $u(x) \equiv 0$, und $B = \mathrm{id}$ wählen für alle $p \in \partial\mathbb{H}^n$. Dagegen hat $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \neq 0\}$ keinen C^1-Rand, obwohl der Rand $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Denn für eine lokale Beschreibung als Subgraph wie in Satz 10.1 (3) würde mit Lemma 10.2 folgen:

$$B\big(\{(x,y) \in U \times I : y > u(x)\}\big) = (\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}) \cap W = \emptyset,$$

ein Widerspruch wegen I offen und $u(x) \in I$ für $x \in U$.

10.4 Lemma (Definition der äußeren Normale). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand. Dann gibt es zu $p \in \partial\Omega$ genau einen Vektor $\nu(p) \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\nu(p) \perp T_p(\partial\Omega)$ und $|\nu(p)| = 1$,*

(2) *$p + t\nu(p) \notin \Omega$ für $t > 0$ hinreichend klein.*

Das Vektorfeld $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$, $p \mapsto \nu(p)$, ist stetig und heißt äußere Normale von Ω.

Beweis: Wähle mit Satz 10.1 (3) eine Bewegung $B(z) = p + Sz$, mit $S \in \mathbb{O}(n)$, und eine C^1-Funktion $u : U \to I$, so dass mit $W = B(U \times I)$ gilt:

$$\Omega \cap W = B\big(\{(x,y) \in U \times I : y < u(x)\}\big).$$

Wir zeigen die Existenz und Eindeutigkeit der äußeren Normalen gleich für alle $q \in \partial\Omega \cap W$. Nach Lemma 10.2 ist die Immersion $f : U \to \mathbb{R}^n$,

$f(x) = B\big((x, u(x))\big)$, eine lokale Parametrisierung von $\partial\Omega$. Nach Folgerung 9.18 besitzt $T_q(\partial\Omega)$ also für $q = B\big((x, u(x))\big)$ die Basis

$$S\,(e_i, \partial_i u(x)) = \frac{d}{dt}\, B(x + te_i, u(x + te_i))|_{t=0}, \qquad \text{wobei } i = 1, \ldots, n-1.$$

Definiere auf $\partial\Omega \cap W$ das Vektorfeld

$$\nu(q) = S\,\frac{(-Du(x), 1)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} \qquad \text{für } q = B(x, u(x)). \tag{10.5}$$

Damit hat $\nu(q)$ die Eigenschaft (1). Weiter gilt $q + t\nu(q) = B\big((x(t), y(t)\big)$ mit

$$x(t) = x - t\,\frac{Du(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} \qquad \text{und} \qquad y(t) = u(x) + t\,\frac{1}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}\,(y(t) - u(x(t))|_{t=0} = \sqrt{1 + |Du(x)|^2} > 0. \tag{10.6}$$

Also gilt $q + t\,\nu(q) \notin \Omega$ für $t > 0$ hinreichend klein nach Lemma 10.2. Damit ist für jedes $q \in \partial\Omega \cap W$ ein Vektor $\nu(q)$ mit den gewünschten Eigenschaften bestimmt, der außerdem stetig von $q \in \partial\Omega \cap W$ abhängt.
Jetzt zeigen wir die Eindeutigkeit. Hat $\nu \in \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft (1) im Punkt q, so folgt $\nu = \pm\nu(q)$ mit $\nu(q)$ wie in (10.5). Aber nach (10.6) und Lemma 10.2 gilt $q - t\nu(q) \in \Omega$ für $t > 0$ hinreichend klein, also wird das Vorzeichen durch (2) bestimmt. □

Das folgende, technische Lemma wird zur Lokalisierung benötigt.

10.7 Lemma (Zerlegung der Eins). *Sei W_λ, $\lambda \in \Lambda$, eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine endliche Familie von Funktionen $\chi_j \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, $1 \le j \le N$, so dass gilt:*

(1) $\sum_{j=1}^N \chi_j(x) = 1$ *für alle* $x \in K$.
(2) *Für jedes* $j \in \{1, \ldots, N\}$ *gibt es ein* $\lambda = \lambda(j)$ *mit* $\operatorname{spt}\chi_j \subset W_\lambda$.

Beweis: Zu $x \in K$ wähle $\lambda(x) \in \Lambda$ mit $x \in W_{\lambda(x)}$, und dann $r(x) > 0$ mit $\overline{B}_{2r(x)}(x) \subset W_{\lambda(x)}$. Endlich viele Kugeln $B_{r(x_j)}(x_j)$, $1 \le j \le N$, überdecken K. Wähle $\widetilde{\chi}_j \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\widetilde{\chi}_j = \begin{cases} 1 & \text{auf } B_{r(x_j)}(x_j) \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \backslash B_{2r(x_j)}(x_j). \end{cases}$$

Dann ist $\operatorname{spt}\widetilde{\chi}_j \subset W_{\lambda(x_j)}$ und $\sum_{j=1}^N \widetilde{\chi}_j(x) \ge 1$ für alle $x \in K$. Also können wir setzen:

$$\chi_j = \widetilde{\chi}_j / \sum_{j=1}^N \widetilde{\chi}_j.$$

□

Zur Formulierung des Satzes von Gauß ist es nützlich, noch folgenden Begriff einzuführen.

10.8 Definition ($C^1(\overline{\Omega})$-Raum). *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $C^1(\overline{\Omega})$ den Unterraum aller Funktionen $f \in C^1(\Omega)$, für die f und Df stetige Fortsetzungen auf $\overline{\Omega}$ besitzen. Es ist dabei üblich, die Fortsetzung von f wieder mit f zu bezeichnen.*

10.9 Satz (Integralsatz von Gauß). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit C^1-Rand und äußerer Normale $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt für ein Vektorfeld $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$*

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\omega.$$

Beweis: Wir beweisen den Satz zunächst für Vektorfelder mit Träger in einer geeigneten Umgebung. Die globale Aussage erhalten wir dann mithilfe einer Zerlegung der Eins.

Als erstes betrachten wir Vektorfelder $X \in C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, deren Träger kompakte Teilmenge von Ω ist. Dann folgt sofort durch partielle Integration, siehe Satz 7.16,

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^n = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \partial_i X_i \, d\mathcal{L}^n = 0 = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\omega.$$

Als zweiten und zentralen Fall betrachten wir Vektorfelder $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit folgender Eigenschaft: es gibt eine Bewegung B des $\mathbb{R}^n$ und eine C^1-Funktion $u : U \to I$, so dass $\operatorname{spt} X$ kompakte Teilmenge von $W = B(U \times I)$ und

$$\Omega \cap W = B\{(x,y) \in U \times I : y < u(x)\}.$$

Wir führen das Argument zuerst für $B = \mathrm{id}$ durch. Mit $I = (a,b)$ gilt nach Fubini

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^n &= \int_{\{(x,y)\in U\times I : y<u(x)\}} \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_U \int_a^{u(x)} \partial_i X_i(x,y) \, dy \, dx \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_U \partial_i \left(\int_a^{u(x)} X_i(x,y) \, dy \right) dx - \sum_{i=1}^{n-1} \int_U X_i(x,u(x)) \partial_i u(x) \, dx \\
&\quad + \int_U X_n(x,u(x)) \, dx \\
&= \int_U \left\langle X(x,u(x)), \frac{(-Du(x),1)}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}} \right\rangle \sqrt{1+|Du(x)|^2} \, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\omega.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Formel (9.22) für das Integral bzgl. des Oberflächenmaßes ω, die Formel (9.9) für den Flächenintegranden von Graphen und die Formel (10.5) für die äußere Normale benutzt.
Der Fall B beliebig, also $B(z) = p + Sz$ mit $p \in \mathbb{R}^n$ und $S \in \mathbb{O}(n)$, wird auf den vorigen reduziert. Betrachte dazu das Vektorfeld

$$\xi : \{(x,y) \in U \times I : y \leq u(x)\} \to \mathbb{R}^n,\ \xi(z) = S^{-1}\, X(B(z)).$$

$\operatorname{spt}\xi$ ist kompakte Teilmenge von $U \times I$. Weiter gilt $D\xi(z) = S^{-1}\, DX(B(z))\, S$, also

$$\operatorname{div}\xi(z) = \operatorname{tr}\big(S^{-1}\, DX(B(z))\, S\big) = \operatorname{tr} DX(B(z)) = (\operatorname{divX})(B(z)).$$

Aus dem Transformationssatz folgt wegen $|\det DB(z)| = |\det S| = 1$

$$\int_\Omega \operatorname{div} X\, d\mathcal{L}^n = \int_{\{(x,y)\in U\times I : y<u(x)\}} \operatorname{div}\xi\, d\mathcal{L}^n.$$

Die Abbildung $f(x) = B((x, u(x)))$ ist eine lokale Parametrisierung von $\partial\Omega$ mit $\partial_i f(x) = S(e_i, \partial_i u(x))$, also mit induzierter Metrik $g_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i u\, \partial_j u$. Nach (9.9) gilt $Jf = \sqrt{1 + |Du|^2}$. Aus der Formel (9.22), der Formel (10.5) und der Definition von ξ ergibt sich

$$\int_{\partial\Omega} \langle X, \nu\rangle\, d\omega = \int_U \left\langle \xi(x, u(x)), \frac{(-Du(x), 1)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} \right\rangle \sqrt{1 + |Du(x)|^2}\, dx.$$

Damit folgt die Aussage für B beliebig aus der Rechnung im Fall $B = \mathrm{id}$.
Sei nun schließlich $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ wie in der Behauptung des Satzes. Für $p \in \overline{\Omega}$ sei $W_p = \Omega$, falls $p \in \Omega$, und W_p wie in Satz 10.1(3) für $p \in \partial\Omega$. Sei $\chi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq N$, eine Zerlegung der Eins wie in Lemma 10.7, mit $K = \overline{\Omega}$. Dann folgt aus den oben betrachteten Spezialfällen

$$\int_\Omega \operatorname{div} X\, d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^N \int_\Omega \operatorname{div}(\chi_j X)\, d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega} \langle \chi_j X, \nu\rangle\, d\omega = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu\rangle\, d\omega.$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

11 Faltung und Fouriertransformation

Es werden die Faltung und die Fouriertransformation für Funktionen im $\mathbb{R}^n$ als Anwendungen der Integrationstheorie behandelt. Die Faltung ordnet zwei gegebenen Funktionen eine dritte Funktion durch gewichtete Mittelung zu. Dieses Verfahren kann unter anderem dazu benutzt werden, gegebene Funktionen zu regularisieren bzw. zu glätten. Die zentrale Aussage zur Fouriertransformation ist der Satz von Plancherel, der die Rückberechnung einer Funktion aus ihrer Fouriertransformierten erlaubt. Als Anwendung berechnen wir die Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu gegebenen Anfangsdaten im $\mathbb{R}^n$, und diskutieren das entsprechende Problem für die Wellengleichung.

In diesem Kapitel haben wir es ausschließlich mit dem n-dimensionalen Lebesguemaß zu tun, und wir schreiben statt $d\mathcal{L}^n(x)$ stets einfach dx.

11.1 Lemma. *Sei $\tau_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$ die Translation um $h \in \mathbb{R}^n$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$ gelten folgende Aussagen:*

(i) $f \circ \tau_h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und* $\|f \circ \tau_h\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$.

(ii) $\|f \circ \tau_h - f\|_{L^p} \to 0$ *für* $h \to 0$.

Beweis: Aussage (i) folgt aus dem Transformationssatz. Wir zeigen (ii) zunächst unter der Annahme $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\omega_f(\delta) := \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)| \searrow 0$ für $\delta \searrow 0$, und es folgt

$$\|f \circ \tau_h - f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)| \leq \omega_f(|h|) \to 0 \text{ mit } h \to 0.$$

Wähle $R > 0$ mit $\operatorname{spt} f \subset B_R(0)$. Wegen $\operatorname{spt} f \circ \tau_h \subset B_{R+1}(0)$ für $|h| < 1$ folgt

$$\|f \circ \tau_h - f\|_{L^p} \leq \|f \circ \tau_h - f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \, \mathcal{L}^n(B_{R+1}(0))^{\frac{1}{p}} \to 0 \text{ mit } h \to 0.$$

Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Nach Satz 6.23 ist $C^0_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, also gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $f_\varepsilon \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} < \varepsilon/2$, und es folgt mit Aussage (i)

$$\begin{aligned} \|f \circ \tau_h - f\|_{L^p} &\leq \|(f - f_\varepsilon) \circ \tau_h\|_{L^p} + \|f_\varepsilon \circ \tau_h - f_\varepsilon\|_{L^p} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \\ &< \|f_\varepsilon \circ \tau_h - f_\varepsilon\|_{L^p} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt $\limsup_{h \to 0} \|f \circ \tau_h - f\|_{L^p} \leq \varepsilon$, und mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt Behauptung (ii). □

11.2 Satz (Definition der Faltung). *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Faltung von f mit g ist die $\mathcal{L}^n$-fast-überall definierte Funktion*

$$f * g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}},\ (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Es gilt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sowie $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^1}$.

Beweis: Die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f(x-y)g(y)$ ist messbar bezüglich $\mathcal{L}^{2n} = \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^n$. Denn $f_0(x,y) = f(x)$ und $g_0(x,y) = g(y)$ sind $\mathcal{L}^{2n}$-messbar, und wegen $f(x-y) = (f_0 \circ T)(x,y)$ mit $T(x,y) = (x-y,y)$ ist $(x,y) \mapsto f(x-y)$ ebenfalls $\mathcal{L}^{2n}$-messbar nach dem Beweis von Satz 4.15.
Wir zeigen die Behauptung zunächst für $f, g \geq 0$. Nach dem Satz von Fubini, Satz 7.13, ist die Funktion $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)\,dy$ für $\mathcal{L}^n$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert und $\mathcal{L}^n$-messbar. Weiter folgt mit der Hölderschen Ungleichung und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)^{\frac{1}{p}}\, g(y)^{\frac{p-1}{p}}\,dy \right)^p dx \\
&\leq \int_{R^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)^p g(y)\,dy \right) \left(\int g(y)\,dy \right)^{p-1} dx \\
&= \left(\int_{R^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)^p g(y)\,dx\,dy \right) \left(\int g(y)\,dy \right)^{p-1} \\
&= \|f\|_{L^p}^p\,\|g\|_{L^1}^p < \infty.
\end{aligned}$$

Für allgemeine $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt durch Zerlegung in $f^{\pm}$ bzw. $g^{\pm}$, dass die Funktion $f * g$ für $\mathcal{L}^n$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert und endlich ist, sowie $\mathcal{L}^n$-messbar. Der Satz ergibt sich nun aus dem Fall $f, g \geq 0$ und der Abschätzung

$$\|f * g\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \right)^p dx \leq \|f\|_{L^p}^p\,\|g\|_{L^1}^p.$$

□

Die Faltung ist kommutativ, denn mit der Substitution $x - y = z$ folgt

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz = (g * f)(x). \quad (11.3)$$

11.4 Satz (Approximation durch Faltung). *Sei $\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta\,d\mathcal{L}^n = 1$. Für $\varrho > 0$ sei $\eta_\varrho(x) = \varrho^{-n}\,\eta(\frac{x}{\varrho})$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \in [1,\infty)$ ist dann auch $f * \eta_\varrho \in L^p(\mathbb{R}^n)$, es gilt $\|f * \eta_\varrho\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}\,\|\eta\|_{L^1}$ und*

$$f * \eta_\varrho \to f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n).$$