Beweis: Durch Substitution sieht man $\|\eta_\varrho\|_{L^1} = \|\eta\|_{L^1}$, daher gilt $f * \eta_\varrho \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * \eta_\varrho\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} \|\eta\|_{L^1}$ nach Satz 11.2. Weiter folgt mit der Substitution $y = \varrho z$

$$(f * \eta_\varrho)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\eta_\varrho(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varrho z)\eta(z)\,dz.$$

Wir schätzen mit der Hölderschen Ungleichung und dem Satz von Fubini wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |(f * \eta_\varrho)(x) - f(x)|^p\,dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-\varrho z) - f(x)\big)\eta(z)\,dz\Big|^p\,dx \\
&\quad \le \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varrho z) - f(x)|\,|\eta(z)|^{\frac{1}{p}}\,|\eta(z)|^{\frac{p-1}{p}}\,dz\Big)^p\,dx \\
&\quad \le \|\eta\|_{L^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varrho z) - f(x)|^p\,|\eta(z)|\,dz\,dx \\
&\quad = \|\eta\|_{L^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta(z)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varrho z) - f(x)|^p\,dx\,dz \\
&\quad = \|\eta\|_{L^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta(z)|\,\|f\circ\tau_{-\varrho z} - f\|_{L^p}^p\,dz.
\end{aligned}$$

Im letzten Integral geht der Integrand punktweise gegen Null mit $\varrho \to 0$ nach Lemma 11.1(ii). Außerdem gilt die Abschätzung

$$|\eta(z)|\,\|f\circ\tau_{-\varrho z} - f\|_{L^p}^p \le 2^p\,\|f\|_{L^p}^p\,|\eta(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Also konvergiert das Integral gegen Null nach dem Satz über majorisierte Konvergenz. □

Wir kommen nun zur Glättung von L^p-Funktionen und erinnern dazu an die Multiindexnotation für Ableitungen von Funktionen im $\mathbb{R}^n$. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ setzt man

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \quad \text{und} \quad D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_n^{\alpha_n}.$$

11.5 Satz (Glättung). *Sei $\eta \in C^k(\mathbb{R}^n)$ mit $\|D^\alpha\eta\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le K$ für $|\alpha| \le k$. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist dann $f * \eta \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$D^\alpha(f*\eta) = f * (D^\alpha\eta), \ \textit{insbesondere}\ \|D^\alpha(f*\eta)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le K\,\|f\|_{L^1}.$$

Beweis: Nach der Substitution $z = x - y$ haben wir

$$(f*\eta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,z)\,dz \text{ mit } F(x,z) = f(z)\eta(x-z).$$

Im Fall $k = 0$ gilt $F(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, die Funktion $F(\cdot, z)$ ist stetig für $\mathcal{L}^n$-fast-alle $z \in \mathbb{R}^n$ und wir haben die Abschätzung

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |F(x, z)| \leq K\,|f(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Also ist $\eta * f$ stetig nach Lemma 6.8 und es gilt $\|f * \eta\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq K\,\|f\|_{L^1}$. Im Fall $k = 1$ gilt $F(\cdot, z) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ für $\mathcal{L}^n$-fast-alle $z \in \mathbb{R}^n$ sowie

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, z)| \leq K\,|f(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Aus Satz 6.9 folgt $f * \eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\partial_j(f * \eta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \partial_j \eta(x - z)\,dz = (f * \partial_j \eta)(z)$, insbesondere gilt die Abschätzung $\|\partial j(f * \eta)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq K\,\|f\|_{L^1}$. Die Aussage für eine Ableitung D^α mit Ordnung $|\alpha| \leq k$ ergibt sich in offensichtlicher Weise durch Induktion. □

Mit dem Verfahren der Glättung lässt sich das Dichteresultat aus Satz 6.23 verschärfen.

11.6 Folgerung (Dichtheit von $C_c^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es zu $f \in L^p(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\|f - f_k\|_{L^p(\Omega)} \to 0$.*

Beweis: Wegen Satz 6.23 können wir $f \in C_c^0(\Omega)$ annehmen. Wähle eine Funktion $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta \geq 0$, $\int \eta\, d\mathcal{L}^n = 1$ und $\operatorname{spt} \eta \subset \overline{B_1(0)}$. Mit $\eta_\varrho(x) = \varrho^{-n} \eta(\frac{x}{\varrho})$ gilt dann $f * \eta_\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 11.5 und $f * \eta_\varrho \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 11.4. Es bleibt nur noch zu prüfen, dass $\operatorname{spt} f * \eta_\varrho$ kompakte Teilmenge von Ω ist für $\varrho > 0$ hinreichend klein. Aber für $\operatorname{dist}(x, \operatorname{spt} f) > \varrho$ gilt $(f * \eta_\varrho)(x) = 0$, denn für $|y| \geq \varrho$ ist $\eta_\varrho(y) = \varrho^{-n} \eta(\frac{y}{\varrho}) = 0$ und für $|y| \leq \varrho$ gilt $f(x - y) = 0$. Damit ist die Folgerung bewiesen. □

Das folgende Argument spielt unter anderem in der Theorie partieller Differentialgleichungen eine Rolle. Es ist dabei nützlich, die Aussage mit lokal integrierbaren Funktionen zu formulieren.

11.7 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Die messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ liegt in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, falls $\chi_K f \in L^p(\Omega)$ ist für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$.*

11.8 Folgerung (Fundamentallemma der Variationsrechnung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für die Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gelte*

$$\int_\Omega f \varphi\, dx \geq 0 \;\text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0.$$

Dann folgt $f(x) \geq 0$ für $\mathcal{L}^n$-fast-alle $x \in \Omega$.

Beweis: Zu zeigen ist, dass $E = \{x \in \Omega : f(x) < 0\}$ eine Nullmenge ist. Nach Satz 4.7 gilt

$$\mathcal{L}^n(E) = \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K \subset E \text{ kompakt}\}.$$

Sei $K \subset E$ kompakt und $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta \geq 0$, $\operatorname{spt}\eta \subset \overline{B_1(0)}$ und $\int \eta\,dx = 1$. Dann folgt $\eta_\varrho * \chi_K \to \chi_K$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, und nach Folgerung 6.19 gilt für eine Teilfolge $\eta_{\varrho_i} * \chi_K \to \chi_K$ punktweise $\mathcal{L}^n$-fast-überall. Wegen $\|\eta_{\varrho_i} * \chi_K\|_{L^\infty} \leq 1$ liefert der Konvergenzsatz von Lebesgue

$$0 \leq \lim_{i\to\infty} \int f\,(\eta_{\varrho_i} * \chi_K)\,dx = \int f\chi_K\,dx.$$

Aber nach Annahme gilt $f < 0$ auf K, also folgt $\mathcal{L}^n(K) = 0$ und damit $\mathcal{L}^n(\{f < 0\}) = 0$. □

11.9 Beispiel. Es gibt keine Funktion $\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f * \eta = f$ für alle $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Denn sonst folgt zum Beispiel in $x = 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(-y)\eta(y)\,dy = f(0) \text{ für alle } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

und Folgerung 11.8 impliziert $\eta = 0$ fast überall, ein Widerspruch.

Wir wollen nun kurz die Theorie der Fourierreihen aus Analysis I wiederholen und mithilfee unserer neuen Theorie formulieren. Sei $L^2(I;\mathbb{C})$ der Raum der $\mathcal{L}^1$-messbaren Funktionen $f : I = (-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$, also $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ sind $\mathcal{L}^1$-messbar, mit

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Dabei schreiben wir im folgenden $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ statt $\int_I f(x)\,d\mathcal{L}^1(x)$. Nach Satz 6.18 ist $L^2(I;\mathbb{C})$ bezüglich der L^2-Norm vollständig, also ein Hilbertraum mit dem hermiteschen Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Die Funktionen $w_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, bilden ein Orthonormalsystem und spannen den Raum $\mathbb{P}$ der trigonometrischen Polynome auf. Das n-te Fourierpolynom von f ist die Orthogonalprojektion von f auf den Raum $\mathbb{P}_n$ der trigonometrischen Polynome vom Grad höchstens n; es lautet

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, w_k\rangle_{L^2} w_k = \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{f}(k)e^{ikx}.$$

Dabei bezeichnet $\widetilde{f}(k)$ die Fourierkoeffizienten von f:

$$\widetilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, w_k \rangle_{L^2}.$$

Die Folge f_n heißt Fourierreihe von f. Wegen $f - f_n \perp_{L^2} \mathbb{P}_n$ gilt für alle $p \in \mathbb{P}_n$ die Gleichung

$$\|f - p\|_{L^2}^2 = \|(f - f_n) + (f_n - p)\|_{L^2}^2 = \|f - f_n\|_{L^2}^2 + \|f_n - p\|_{L^2}^2. \quad (11.10)$$

Insbesondere folgt mit $p \equiv 0$ die Besselsche Ungleichung

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widetilde{f}(k)|^2 = 2\pi \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} |\widetilde{f}(k)|^2 = \lim_{n \to \infty} \|f_n\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 < \infty. \quad (11.11)$$

Für $f \in L^2(I; \mathbb{C})$ ist also f_n eine L^2-Cauchyfolge und konvergiert nach Satz 6.18, dem Satz von Riesz-Fischer, gegen eine gewisse L^2-Funktion. Die entscheidende Frage lautet: ist dieser Grenzwert die Funktion f? Wegen (11.10) haben wir die folgende Bestapproximations-Eigenschaft der Fourierreihe:

$$\|f - f_n\|_{L^2} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{L^2}. \quad (11.12)$$

Die L^2-Konvergenz der Fourierreihe gegen f folgt somit aus nachstehendem Resultat:

11.13 Lemma. *Der Raum $\mathbb{P}$ der trigonometrischen Polynome ist dicht in $L^2(I; \mathbb{C})$.*

Beweis: Nach Satz 6.23 ist $C_c^0(I; \mathbb{C})$ dicht in $L^2(I; \mathbb{C})$. Weiter kann jede C_c^0-Funktion bezüglich der L^2-Norm (sogar gleichmäßig) durch stückweise konstante Funktionen approximiert werden. Wir zeigen nun, dass die Fourierreihe f_n einer beliebigen stückweise konstanten Funktion f punktweise – bis auf eventuell in den Sprungstellen – gegen f konvergiert. Dann konvergiert f_n auch bezüglich der L^2-Norm gegen f, denn die Cauchyfolge f_n ist in $L^2(I; \mathbb{C})$ konvergent und nach Folgerung 6.19 kann der Grenzwert nur die Funktion f sein. Damit ist die Behauptung des Lemma bewiesen.

Die Funktion f sei mit Periode 2π auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Nach Definition von f_n gilt für $x_0 \in I$

$$\begin{aligned} f_n(x_0) = \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{f}(k)\, e^{ikx_0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=-n}^{n} e^{-ik(x-x_0)}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + \xi) \sum_{k=-n}^{n} e^{-ik\xi}\, d\xi. \end{aligned}$$

Dabei wurde $x = x_0 + \xi$ substituiert und die Periodizität ausgenutzt. Nun ist $(f_0)_n = f_0$ für die konstante Funktion $f_0(x) \equiv 1$, da $f_0 \in \mathbb{P}_n$. Es folgt

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{-ik\xi}\, d\xi.$$

Weiter berechnen wir für $\xi \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{-ik\xi} = e^{-in\xi} \sum_{k=0}^{2n} e^{ik\xi} = e^{-in\xi} \frac{e^{i(2n+1)\xi} - 1}{e^{i\xi} - 1} = \frac{e^{i(n+1)\xi} - e^{-in\xi}}{e^{i\xi} - 1}.$$

Damit erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} f_n(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + \xi) - f(x_0)) \sum_{k=-n}^{n} e^{-ik\xi}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+\xi) - f(x_0)}{e^{i\xi} - 1}\, e^{i(n+1)\xi}\, d\xi \\ &\quad -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+\xi) - f(x_0)}{e^{i\xi} - 1}\, e^{-in\xi}\, d\xi. \end{aligned}$$

Ist f stückweise konstant und x_0 keine Sprungstelle von f, so verschwindet $f(x_0 + \xi) - f(x_0)$ nahe bei $\xi = 0$. Auf der rechten Seite stehen dann die Fourierkoeffizienten $\widetilde{F}(-n-1) - \widetilde{F}(n)$ der beschränkten Funktion $F(\xi) = (f(x_0 + \xi) - f(x_0))/(e^{i\xi} - 1)$, und aus der Besselschen Ungleichung (11.11) folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$. □

Es bezeichne nun $l^2(\mathbb{C})$ den Raum aller komplexen Folgen $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\|c\|_{l^2}^2 = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty.$$

Der Raum $l^2(\mathbb{C})$ ist vollständig und damit ein Hilbertraum. Dies folgt aus dem Satz von Riesz-Fischer, angewandt auf des Zahlmaß auf $\mathbb{Z}$; es kann natürlich auch ad hoc gezeigt werden. Das bewiesene Resultat kann damit folgendermaßen formuliert werden:

11.14 Satz (Vollständigkeit der trigonometrischen Polynome). *Für jedes $f \in L^2(I;\mathbb{C})$ konvergiert die Fourierreihe in L^2 gegen f, das heißt f wird durch seine Fourierreihe dargestellt. Darüber hinaus ist die Abbildung*

$$\mathcal{F} : (L^2(I;\mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^2}) \longrightarrow (l^2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{l^2}), \quad \mathcal{F}(f) = (\widetilde{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}},$$

eine (bijektive) Isometrie von Hilberträumen.

Beweis: Die Konvergenz $f_n \to f$ in $L^2(I;\mathbb{C})$ gilt nach Lemma 11.13 und (11.12); insbesondere folgt hieraus die Injektivität der Abbildung $\mathcal{F}$. Die Surjektivität ergibt sich aus Satz 6.18, denn für $c \in l^2(\mathbb{C})$ ist die Folge $f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx}$ eine Cauchyfolge in $L^2(I;\mathbb{C})$. Schließlich erhalten wir aus (11.10) mit $p \equiv 0$ und der gezeigten L^2-Konvergenz $f_n \to f$, vgl. (11.11),

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widetilde{f}(k)|^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2}^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\|f\|_{L^2}^2 - \|f - f_n\|_{L^2}^2\right) = \|f\|_{L^2}^2.$$

□

Die Fourierintegraldarstellung kann als kontinuierliche Version der Fourierentwicklung aufgefasst werden; wir deuten kurz an, wie sie sich durch Grenzübergang aus der Fourierreihe ergibt. Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $N > 0$ so groß, dass $\operatorname{spt} f \subset (-N\pi, N\pi)$. Die normierten Basisfunktionen mit Periode $2\pi N$ lauten

$$w_k^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{i\frac{k}{N}x} \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Nach Satz 11.14 wird die Funktion f auf $(-N\pi, N\pi)$ durch ihre Fourierreihe dargestellt, das heißt für fast alle $x \in (-N\pi, N\pi)$ gilt

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi N} e^{i\frac{k}{N}x} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\frac{k}{N}y}\, dy =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N},$$

wobei

$$F(p) = \frac{1}{2\pi} e^{ipx} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ipy}\, dy.$$

Falls nun $F(p)$ für $p \to \pm\infty$ hinreichend schnell gegen Null geht, so sollte die Riemannsche Summe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k}{N}\right)\frac{1}{N}$ für $N \to \infty$ gegen das Integral $\int_{\mathbb{R}} F(p)\, dp$ konvergieren. Damit ergibt sich für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ die vermutete Fourierintegraldarstellung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) e^{ipx}\, dp \quad \text{ mit } \hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ipy}\, dy.$$

Der geschilderte Ansatz kann zu einem Beweis ausgebaut werden, wir gehen aber anders vor. Alle im Folgenden auftretenden Funktionen sind $\mathbb{C}$-wertig.

11.15 Definition. *Die Fouriertransformierte von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Funktion*

$$\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle p,x\rangle}\, dx.$$

Die inverse Fouriertransformierte von $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\check{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(p) e^{i\langle p,x\rangle}\, dp.$$

Bevor wir die Frage angehen, inwiefern die beiden Transformationen invers sind, notieren wir noch folgende Eigenschaften.

11.16 Satz (Fouriertransformation auf L^1). *Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

(1) $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ *und* $\|\hat{f}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1}$.

(2) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}\hat{g}$.

(3) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\, \overline{g}\, dp = \int_{\mathbb{R}^n} f\, \overline{\check{g}}\, dx$.

Beweis: Für $F(p,x) = f(x)e^{-i\langle p,x\rangle}$ ist $F(p,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$ sowie $F(\cdot,x) \in C^0(\mathbb{R}^n)$ für $\mathcal{L}^n$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt

$$\sup_{p\in\mathbb{R}^n} |F(x,p)| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Also folgt die Stetigkeit von $\hat{f}$ aus der entsprechenden Aussage für Parameterintegrale, Lemma 6.8. Die Abschätzung in (1) ist offensichtlich. Für (2) berechnen wir mit Fubini

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy\,e^{-i\langle p,x\rangle}\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)e^{-i\langle p,x\rangle}\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle p,y\rangle}\hat{g}(p)\,dy \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(p)\hat{g}(p).
\end{aligned}$$

Auch (3) folgt aus dem Satz von Fubini, und zwar gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(p)\,\overline{g(p)}\,dp &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle p,x\rangle}\,dx\,\overline{g(p)}\,dp \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\overline{\int_{\mathbb{R}^n} g(p)e^{i\langle p,x\rangle}\,dp}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\overline{\check{g}(x)}\,dx.
\end{aligned}$$

□

Wir berechnen nun zwei Beispiele – das erste werden wir im Beweis von Satz 11.19 verwenden.

11.17 Beispiel. Für die Gaußfunktion $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, gilt $\hat{G} = G = \check{G}$. Wegen $\check{G}(x) = \hat{G}(-x)$ reicht es, $\hat{G}$ zu berechnen. Die Behauptung für $\hat{G}$ wiederum folgt aus dem Fall $n = 1$, denn mit $p = (\eta, p_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ gilt nach Fubini

$$\hat{G}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2} - i\langle \xi,\eta\rangle} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_n)^2}{2} - ix_n p_n}\,dx_n\,d\xi\,.$$

Für $n = 1$ liefert Differentiation unter dem Integralzeichen und partielle Integration

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixp}\,dx &= \int_{\mathbb{R}} (-ix)e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixp}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) ie^{-ixp}\,dx \\
&= (-p) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixp}\,dx,
\end{aligned}$$

das heißt $\hat{G}(p)$ löst die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dp}\hat{G}(p) = -p\,\hat{G}(p).$$

Aber nach Beipiel 8.10 gilt $\hat{G}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$. Die eindeutige Lösung dieses Anfangswertproblems ist $e^{-\frac{p^2}{2}}$, d.h. $\hat{G} = G$. Mit Induktion ergibt sich auch für beliebige n $\hat{G} = G$, wie behauptet.

11.18 Beispiel. Für $a > 0$ gilt

$$\widehat{\chi_{[-a,a]}}(p) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(pa)}{p} & \text{für } p \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,a & \text{für } p = 0. \end{cases}$$

Das zweite Beispiel zeigt, dass die Fouriertransformierte einer L^1-Funktion im allgemeinen nicht wieder in L^1 liegt. Aufgrund dieser Asymmetrie kann das Problem der Fourierintegraldarstellung im L^1-Kontext nicht befriedigend behandelt werden. Der richtige Raum ist $L^2(\mathbb{R}^n)$, denn bezüglich der L^2-Norm ist die Fouriertransformation sogar isometrisch.

11.19 Satz (Plancherel). *Für* $f \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|\check{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Beweis: Es reicht die Aussage für $\hat{f}$ zu beweisen, da $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$. Sei G wie in Beispiel 11.17 und $G_\varrho(z) = \varrho^{-n} G\left(\frac{z}{\varrho}\right)$ für $\varrho > 0$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} G(\varrho p) e^{-i\langle p,z\rangle}\,dp &= \frac{\varrho^{-n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} G(q) e^{-i\langle q,\frac{z}{\varrho}\rangle}\,dq \\ &= \varrho^{-n}\,\hat{G}\left(\frac{z}{\varrho}\right) \\ &= G_\varrho(z). \end{aligned}$$

Wir berechnen nun mit dem Satz über monotone Konvergenz und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^2}^2 &= \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(p)|^2 G(\varrho p)\,dp \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(y)} e^{-i\langle p,x-y\rangle}\,dy\,dx\,G(\varrho p)\,dp \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} G(\varrho p) e^{-i\langle p,x-y\rangle}\,dp\,f(x)\overline{f(y)}\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(y)} G_\varrho(x-y)\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\overline{f} * G_\varrho)(x)\,dx. \end{aligned}$$