Aus Beispiel 8.10 folgt mit Fubini $\int_{\mathbb{R}^n} G(z)\,dz = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$. Nach Satz 11.4 konvergiert deshalb $(2\pi)^{-n/2}\,\overline{f} * G_\varrho$ gegen $\overline{f}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, und es folgt $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. □

11.20 Satz (Fouriertransformation auf L^2). *Es gibt eindeutig bestimmte Abbildungen $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^* : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\mathcal{F}f = \hat{f}$ und $\mathcal{F}^* f = \check{f}$ für alle $f \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$,*

(2) *$\|\mathcal{F}\,f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}^* f\|_{L^2}$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Weiter gelten für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ folgende Aussagen:

(3) *$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{L^2} = \langle f, g\rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}^* f, \mathcal{F}^* g\rangle_{L^2}$.*

(4) *$\langle \mathcal{F}f, g\rangle_{L^2} = \langle f, \mathcal{F}^* g\rangle_{L^2}$.*

(5) *$\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.*

Beweis: Der Raum $(L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$, denn für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist $\chi_{B_R(0)} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nach Cauchy-Schwarz, und es gilt $\chi_{B_R(0)} f \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $R \to \infty$. Die Eindeutigkeit und Existenz der Abbildungen $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}^*$ mit (1) und (2) folgt damit leicht aus Satz 11.19. In dem komplexen Skalarproduktraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt die Polarisationsformel

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|_{L^2}^2 - \|f-g\|_{L^2}^2 + i\|f+ig\|_{L^2}^2 - i\|f-ig\|_{L^2}^2\right).$$

Also folgt (3) aus (2). Da in (4) beide Seiten stetig bzgl. der L^2-Norm sind, folgt die Aussage aus Satz 11.16 (3) durch Approximation. Schließlich ergibt sich aus (4) und (3)

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^* f, g\rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}^* f, \mathcal{F}^* g\rangle_{L^2} = \langle f, g\rangle_{L^2},$$

also $\mathcal{F}\mathcal{F}^* f = f$. Die Gleichung $\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = f$ folgt analog. □

Im folgenden schreiben wir $\hat{f}$ bzw. $\check{g}$ auch dann, wenn f, g nur in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegen. Die Fouriertransformation spielt eine wichtige Rolle in der Theorie linearer partieller Differentialgleichungen. Dies basiert vor allem darauf, dass Ableitungsoperatoren in Multiplikationsoperatoren transformiert werden. Es ist oft praktisch, dabei im sogenannten Raum der schnell fallenden Funktionen oder Schwartz-Raum zu operieren:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : x^\alpha D^\beta f \text{ ist beschränkt für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\} \quad (11.21)$$

Wie üblich ist hier $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ und $D^\beta = \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_n^{\beta_n}$. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $|f(x)| \leq C_N\,(1+|x|^2)^{-N/2}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$, insbesondere ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty]$. Außerdem sind mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auch $\partial_j f$ und $x_j f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq j \leq n$.

11.22 Satz (Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:*

(1) $\widehat{\partial_j f}(p) = i\, p_j \hat{f}(p)$ *sowie* $\widehat{x_j f}(p) = i\, \partial_j \hat{f}(p)$.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(p) e^{i\langle p,x\rangle}\, dp$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Die Funktion $\hat{f}$ ist beschränkt nach Satz 11.16 (1). Wir berechnen mit partieller Integration, siehe Satz 7.16,

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial_j f}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j f)(x)\, e^{-i\langle p,x\rangle}\, dx \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-i\langle p,x\rangle}\, dx \\
&= i\, p_j\, \hat{f}(p).
\end{aligned}$$

Weiter folgt durch Herausziehen der Ableitung aus dem Integral

$$\begin{aligned}
\widehat{x_j f}(p) &= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial p_j} e^{-i\langle p,x\rangle}\, dx \\
&= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial}{\partial p_j} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle p,x\rangle}\, dx \\
&= i\, \partial_j \hat{f}(p).
\end{aligned}$$

Insbesondere sind auch die Funktionen $p_j \hat{f}$ und $\partial_j \hat{f}$ beschränkt, wieder nach Satz 11.16 (1). Durch Induktion über $|\alpha| + |\beta|$ verifiziert man leicht die allgemeine Formel

$$\widehat{D^\alpha x^\beta f} = i^{|\alpha|+|\beta|}\, p^\alpha D^\beta \hat{f},$$

und erhält $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Aus Satz 11.20 folgt Behauptung (2) zunächst für $\mathcal{L}^n$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^n$, wegen der Stetigkeit beider Seiten also sogar für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir wollen zum Schluss des Kapitels noch zwei Anwendungen auf die Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten behandeln. Typischerweise wird dabei zunächst mit einem Fourieransatz eine Lösungsformel ermittelt, wobei die Eigenschaften der Fouriertransformation formal angewandt werden. In einem zweiten Schritt wird dann geprüft, unter welchen Voraussetzungen an die Daten die Formel eine gültige Lösung liefert. Dieser Punkt kann technisch anspruchsvoll sein – je nach Gleichung – und wird hier nur angedeutet.

11.23 Beispiel. Betrachte das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\
u(\cdot,0) &= f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Wir bilden die Fouriertransformierte $\hat{u}(\cdot,t) = \widehat{u(\cdot,t)}$ bezüglich der räumlichen Variablen. Mit Satz 11.22 erhalten wir für $\hat{u}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 0 = \widehat{\partial_t u} - \widehat{\Delta u} &= \partial_t \hat{u} + |p|^2 \hat{u} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \hat{f} &= \hat{u}(0,\cdot) \quad \text{auf } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Es folgt $\hat{u}(p,t) = \hat{f}(p)\, e^{-t|p|^2}$. Aber nach Beispiel 11.17 gilt für $G_{\sqrt{2t}}(x) = (2t)^{-\frac{n}{2}}\, G\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)$

$$\widehat{G_{\sqrt{2t}}}(p) = \hat{G}(\sqrt{2t}\, p) = G(\sqrt{2t}\, p) = e^{-t|p|^2}.$$

Aus Satz 11.16 (2) folgt nun $u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, f * G_{\sqrt{2t}}$, das heißt

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Formel für beschränkte und stetige Anfangsdaten f eine Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ des Anfangswertproblems liefert.

11.24 Beispiel. Als zweites betrachten wir das Anfangswertproblem für die Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) &= f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n, \\ \partial_t u(\cdot,0) &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Wir führen den analogen Fourieransatz durch und erhalten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 0 = \widehat{\partial_t^2 u} - \widehat{\Delta u} &= \partial_t^2 \hat{u} + |p|^2 \hat{u} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \hat{f} &= \hat{u}(0,\cdot) \quad \text{auf } \mathbb{R}^n, \\ \hat{g} &= \partial_t \hat{u}(0,\cdot). \end{aligned}$$

Es folgt diesmal für die Fouriertransformierte

$$\hat{u}(p,t) = \hat{f}(p)\, \cos t|p| + \hat{g}(p)\, \frac{\sin t|p|}{|p|}.$$

Angenommen, es gibt eine Funktion $R : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\hat{R} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\sin(t|p|)}{|p|}$. Dann liefert formale Anwendung von Satz 11.16(2)

$$\begin{aligned} \widehat{R * g} &= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \hat{R}\, \hat{g} = \hat{g}(p)\, \frac{\sin t|p|}{|p|}, \\ \partial_t \widehat{(R * f)} &= \partial_t \left(\widehat{R * f}\right) = \partial_t \left(\hat{f}(p)\, \frac{\sin(t|p|)}{|p|}\right) = \hat{f}(p) \cos(t|p|). \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems wäre dann $u = \partial_t(R * f) + R * g$. Für $n = 1$ können wir $R = \frac{1}{2}\chi_{[-t,t]}$ wählen nach Beispiel 11.18 und erhalten

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy\right).$$

Dies liefert eine gültige Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, falls $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$. Für $n = 2$ behaupten wir

$$R(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\chi_{B_t(0)}}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}.$$

Denn mit Fubini folgt, zunächst für $p = (0,|p|) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
2\pi\,\hat{R}(p,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\{|x|<t\}} \frac{e^{-i\langle p,x\rangle}}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\,dx \\
&= \frac{t}{2\pi}\int_{\{|y|<1\}} \frac{e^{-i\langle tp,y\rangle}}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy \\
&= \frac{t}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-it|p|y_2}\int_{-\sqrt{1-y_2^2}}^{\sqrt{1-y_2^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y_2^2-y_1^2}}\,dy_1\,dy_2 \\
&= \frac{t}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-it|p|y_2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta\,dy_2 \\
&= \frac{t}{2}\int_{-1}^{1} e^{-it|p|y_2}\,dy_2 \\
&= \frac{\sin|p|t}{|p|}.
\end{aligned}$$

Dann gilt aber $\hat{R}(p,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin|p|t}{|p|}$ für alle $p \neq 0$, da beide Seiten invariant unter Drehungen sind. Wir haben also für $n = 2$ die Formel

$$u(t,x) = \partial_t\left(\frac{t}{2\pi}\int_{\{|y|<1\}}\frac{f(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy\right) + \frac{t}{2\pi}\int_{\{|y|<1\}}\frac{g(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy.$$

Damit die Formel eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ definiert, müssen wir für $n = 2$ mehr voraussetzen, nämlich $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$. Beachte auch, dass $R(\cdot,t)$ für $n = 2$ nicht mehr in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt. Für $n \geq 3$ ist die Gleichung $\hat{R}(p,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{\sin|p|t}{|p|}$ gar nicht mehr durch eine Funktion lösbar; trotzdem kann mit dem Ansatz eine Lösung gefunden werden. Der zweite Schritt – die Rechtfertigung der Lösungsformel – ist jedenfalls für die Wellengleichung subtiler als für die Wärmeleitungsgleichung.