**1.18 Folgerung (Monotonie und Subadditivität).** *Sei $\lambda$ ein Inhalt auf dem Halbring $\mathcal{P}$ über $X$. Dann gilt die Implikation*

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i \text{ mit } P, P_1, \dots, P_k \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \lambda(P) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i).$$

Beweis: Nach Satz 1.16 können wir annehmen, dass $\mathcal{P}$ ein Ring ist. Es gilt zunächst die Monotonie

$$P, Q \in \mathcal{P},\, Q \supset P \quad \Rightarrow \quad \lambda(Q) = \lambda(P) + \underbrace{\lambda(Q \backslash P)}_{\geq 0} \geq \lambda(P).$$

Für $P, P_1, \dots, P_k$ wie in der Voraussetzung erhalten wir weiter die Subadditivität

$$\lambda\big(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\big) = \lambda\big(\bigcup_{i=1}^{k} P_i \backslash (\bigcup_{j=1}^{i-1} P_j)\big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda\big(P_i \backslash (\bigcup_{j=1}^{i-1} P_j)\big) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i).$$

Also folgt $\lambda(P) \leq \lambda(\bigcup_{i=1}^{k} P_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i)$. $\square$

Den vom System $\mathcal{P}^n$ aller Quader $P \subset \mathbb{R}^n$ erzeugten Ring bezeichnen wir mit $\mathcal{F}^n$. Seine Elemente sind die Figuren, das heißt endliche Vereinigungen von Quadern. Für den nach Satz 1.16 fortgesetzten Inhalt schreiben wir $\lambda^n : \mathcal{F}^n \to [0, \infty]$.

**1.19 Definition (Jordanscher Inhalt).** *Für eine beschränkte Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir den äußeren bzw. inneren Jordanschen Inhalt durch*

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{vol}}^n(E) &:= \inf\{\lambda^n(F) : F \text{ Figur mit } F \supset E\} \\ \underline{\mathrm{vol}}^n(E) &:= \sup\{\lambda^n(F) : F \text{ Figur mit } F \subset E\}. \end{aligned}$$

*Bei Gleichheit $\overline{\mathrm{vol}}^n(E) = \underline{\mathrm{vol}}^n(E) =: \mathrm{vol}^n(E)$ heißt $E$ quadrierbar, und $\mathrm{vol}^n(E)$ heißt Jordanscher Inhalt von $E$.*

**1.20 Lemma.** *Die beschränkte Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann quadrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Figuren $F_1 \subset E \subset F_2$ gibt mit $\lambda^n(F_2 \backslash F_1) < \varepsilon$.*

Beweis: Für $F_1', F_2' \in \mathcal{F}^n$ mit $F_1' \subset E \subset F_2'$ gilt nach Satz 1.16

$$\lambda^n(F_1') \leq \lambda^n(F_1') + \lambda^n(F_2' \backslash F_1') = \lambda^n(F_2') \tag{$\star$}$$

und somit

$$0 \leq \lambda^n(F_2' \backslash F_1') \leq \lambda^n(F_2') - \lambda^n(F_1').$$

Indem wir in $(\star)$ das Supremum über $F_1'$ sowie das Infimum über $F_2'$ bilden, folgt für $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^n$

$$F_1 \subset E \subset F_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^n(F_1) \leq \underline{\mathrm{vol}}^n(E) \leq \overline{\mathrm{vol}}^n(E) \leq \lambda^n(F_2) < \infty, \tag{1.21}$$

und hieraus ergibt sich die Behauptung. $\square$

**1.22 Satz (Jordaninhalt).** *Für das System $\mathcal{Q}^n$ der quadrierbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$ und den Jordanschen Inhalt* $\mathrm{vol}^n$ *gilt:*

(i) *$\mathcal{Q}^n$ ist ein Ring, der den Ring $\mathcal{F}^n$ der Figuren enthält.*

(ii) $\mathrm{vol}^n : \mathcal{Q}^n \to [0,\infty)$ *ist ein Inhalt mit* $\mathrm{vol}^n|_{\mathcal{F}^n} = \lambda^n$.

Beweis: Es ist klar, dass $\emptyset \in \mathcal{Q}^n$ und $\mathrm{vol}^n(\emptyset) = 0$, vgl. den Beweis von Satz 1.5. Für (i) ist zu zeigen, dass mit $E, E' \in \mathcal{Q}^n$ auch $E \backslash E'$ und $E \cup E'$ in $\mathcal{Q}^n$ liegen. Wähle nach Lemma 1.20 Figuren $F_1 \subset E \subset F_2$ bzw. $F_1' \subset E' \subset F_2'$ mit

$$\lambda^n(F_2 \backslash F_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \lambda^n(F_2' \backslash F_1') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Offenbar gilt

$$F_1 \backslash F_2' \subset E \backslash E' \subset F_2 \backslash F_1' \qquad \text{und} \qquad F_1 \cup F_1' \subset E \cup E' \subset F_2 \cup F_2'.$$

Man prüft durch Fallunterscheidung nach:

$$(F_2 \backslash F_1') \backslash (F_1 \backslash F_2') \subset (F_2 \backslash F_1) \cup (F_2' \backslash F_1'),$$
$$(F_2 \cup F_2') \backslash (F_1 \cup F_1') \subset (F_2 \backslash F_1) \cup (F_2' \backslash F_1').$$

Damit erhalten wir nach Folgerung 1.18

$$\lambda^n\big((F_2 \backslash F_1') \backslash (F_1 \backslash F_2')\big) \leq \lambda^n(F_2 \backslash F_1) + \lambda^n(F_2' \backslash F_1') < \varepsilon.$$

Analog ergibt sich $\lambda^n\big((F_2 \cup F_2') \backslash (F_1 \cup F_1')\big) < \varepsilon$, und es folgt $E \backslash E'$, $E \cup E' \in \mathcal{Q}^n$ nach Lemma 1.20.
Um (ii) zu beweisen, reicht es (1.8) für 2 disjunkte Mengen $E, E' \in \mathcal{Q}^n$ zu überprüfen. Für Figuren $F_1 \subset E \subset F_2$ bzw. $F_1' \subset E' \subset F_2'$ folgt dann

$$\begin{aligned}
\lambda^n(F_1) + \lambda^n(F_1') &= \lambda^n(F_1 \cup F_1') \quad (\text{nach Satz } 1.16)\\
&\leq \underline{\mathrm{vol}}^n(E \cup E') \quad (\text{nach } (1.21))\\
&= \overline{\mathrm{vol}}^n(E \cup E') \quad (\text{da } E \cup E' \in \mathcal{Q}^n)\\
&\leq \lambda^n(F_2 \cup F_2') \quad (\text{nach } (1.21))\\
&\leq \lambda^n(F_2) + \lambda^n(F_2').
\end{aligned}$$

Bilde das Supremum über alle $F_1, F_1'$ und das Infimum über alle $F_2, F_2'$. Dies ergibt

$$\mathrm{vol}^n(E \cup E') = \mathrm{vol}^n(E) + \mathrm{vol}^n(E'),$$

und damit die endliche Additivität der Funktion $\mathrm{vol}^n$. Für $F \in \mathcal{F}^n$ wählen wir schließlich $F_1 = F_2 = F$ in (1.21) und erhalten $\lambda^n(F) = \underline{\mathrm{vol}}^n(F) = \overline{\mathrm{vol}}^n(F)$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Der Jordansche Inhalt setzt somit den Elementarinhalt $\lambda^n : \mathcal{F}^n \to [0,\infty]$ auf den Ring $\mathcal{Q}^n$ der quadrierbaren Mengen fort. Natürlich stellt sich nun die Frage, wie groß $\mathcal{Q}^n$ eigentlich ist. Hierzu betrachten wir zunächst zwei negative Beispiele.

**1.23 Beispiel.** Die Menge $E = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{R}$ ist nicht quadrierbar. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} E \subset F \text{ mit } F \in \mathcal{F}^1 &\Rightarrow [0,1] = \overline{E} \subset \overline{F} \Rightarrow \overline{\mathrm{vol}}^1(E) = 1, \\ F \subset E \text{ mit } F \in \mathcal{F}^1 &\Rightarrow \quad \mathrm{int}(F) = \emptyset \quad \Rightarrow \underline{\mathrm{vol}}^1(E) = 0. \end{aligned}$$

Ein einzelner Punkt $\{x\} \subset \mathbb{R}$ ist offensichtlich quadrierbar mit $\mathrm{vol}^1(\{x\}) = 0$. Also ist das System der quadrierbaren Mengen zwar unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen, nicht jedoch unter abzählbar unendlichen Vereinigungen.

**1.24 Beispiel.** Es gibt sogar eine offene Menge $U \subset (0,1)$, die nicht quadrierbar ist. Wähle dazu eine Abzählung $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{q_1, q_2, \ldots\}$ und setze für $\varepsilon \in (0, 1/2)$

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \quad \text{mit } U_k = (q_k - 2^{-k}\varepsilon, q_k + 2^{-k}\varepsilon) \cap (0,1).$$

Wir behaupten $\underline{\mathrm{vol}}^1(U) \leq 2\varepsilon < 1 = \overline{\mathrm{vol}}^1(U)$. Für die linke Ungleichung betrachten wir eine beliebige Figur $F \subset U$. Ist $F$ kompakt, so gilt nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel schon $F \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_k$ für ein $m < \infty$, und es folgt

$$\lambda^1(F) \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda^1(U_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k}\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ist $F$ nicht kompakt, so wählen wir eine Folge kompakter Figuren $F_j \subset F$ mit $\lambda^1(F_j) \nearrow \lambda^1(F)$, womit die Ungleichung $\underline{\mathrm{vol}}^1(U) \leq 2\varepsilon$ gezeigt ist. Jede Figur $F \supset U$ erfüllt andererseits $\overline{F} \supset \overline{U} = [0,1]$, und dies bedeutet $\overline{\mathrm{vol}}^1(U) = 1$. Somit ist $U$ ist nicht quadrierbar.

Um die quadrierbaren Mengen allgemein zu charakterisieren, benötigen wir das folgende Verfahren, das beliebige Mengen durch Figuren in einem Gitter approximiert. Dieses Lemma wird an mehreren Stellen der Vorlesung eingesetzt.

**1.25 Lemma (Approximation durch Gitterfiguren).** *Betrachte die Würfelfamilie $\mathcal{W}_k = \{Q_{k,m} := 2^{-k}(m + [0,1]^n) : m \in \mathbb{Z}^n\}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und definiere für $E \subset \mathbb{R}^n$ die Mengen*

$$\begin{aligned} F_k(E) &:= \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k : Q \subset E\}, \\ F^k(E) &:= \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k : Q \cap E \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

*Dann gilt:*

(i) *$F_k(E)$ und $F^k(E)$ sind abgeschlossene Vereinigungen von abzählbar vielen kompakten Würfeln mit paarweise disjunktem Inneren.*

(ii) $F_1(E) \subset F_2(E) \subset \ldots \subset E$ *und* $F^1(E) \supset F^2(E) \supset \ldots \supset E$.

(iii) $F_k(E) \supset \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}\,(x, \mathbb{R}^n \backslash E) > 2^{-k}\sqrt{n}\}$
$F^k(E) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}\,(x, E) \leq 2^{-k}\sqrt{n}\}$.

(iv) $\text{int}(E) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(E) \subset E$ *sowie* $\overline{E} \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} F^k(E) \supset E$.

Beweis: Die Würfelfamilie $\mathcal{W}_k$ hat abzählbar viele Elemente. Weiterhin sind die Würfel aus $\mathcal{W}_k$ kompakt, haben paarweise disjunkte Innere und jede beschränkte Menge wird nur von endlich vielen Würfeln aus $\mathcal{W}_k$ getroffen. Insbesondere sind also $F_k(E), F^k(E)$ abgeschlossen. Somit folgt (i).
Nun ist $Q_{k,m}$ die Vereinigung der $2^n$ Teilwürfel $Q_{k+1,2m+l}$ mit $l \in \{0,1\}^n$, und es gilt

$$Q_{k,m} \subset E \Rightarrow Q_{k+1,2m+l} \subset E \quad \text{für alle } l \in \{0,1\}^n,$$
$$Q_{k+1,2m+l} \cap E \neq \emptyset \Rightarrow Q_{k,m} \cap E \neq \emptyset \quad \text{wobei } l \in \{0,1\}^n.$$

Daraus folgt $F_k(E) \subset F_{k+1}(E)$ und $F^k(E) \supset F^{k+1}(E)$. Die fehlenden Inklusionen folgen aus der Definition von $F_k(E)$ und daraus, dass für beliebige $x \in E$ ein $Q \in \mathcal{W}_k$ existiert mit $x \in Q$. Somit ist (ii) bewiesen.
Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\text{dist}\,(x, \mathbb{R}^n \backslash E) > 2^{-k}\sqrt{n}$. Dann existiert ein $Q \in \mathcal{W}_k$ mit $x \in Q$, und es folgt wegen $\text{diam}\,(Q) = 2^{-k}\sqrt{n}$

$$Q \subset E \quad \Rightarrow \quad x \in F_k(E).$$

Ist andererseits $x \in F^k(E)$, so gilt $x \in Q$ für ein $Q \in \mathcal{W}_k$ mit $Q \cap E \neq \emptyset$. Also gilt

$$x \in F^k(E) \quad \Rightarrow \quad \text{dist}\,(x, E) \leq \text{diam}\,(Q) \leq 2^{-k}\sqrt{n},$$

womit beide Behauptungen in (iii) gezeigt sind.
Die Behauptungen aus (iv) folgen sofort aus (iii) und den Definitionen von $\text{int}(E)$ und $\overline{E}$. □

**1.26 Satz (Quadrierbarkeitskriterium).** *Für eine beschränkte Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$E \textit{ quadrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\text{vol}}^n(\partial E) = 0.$$

Beweis: Sei $E$ quadrierbar. Dann gibt es nach Lemma 1.20 zu $\varepsilon > 0$ Figuren $F_1 \subset E \subset F_2$ mit $\lambda^n(F_2 \backslash F_1) < \varepsilon$. Es sei oBdA $F_1$ offen und $F_2$ kompakt, andernfalls schreibe $F_1, F_2$ als Vereinigung endlich vieler Quader und gehe zu den offenen bzw. abgeschlossenen Quadern über. Dabei ändert sich $\lambda(F_2 \backslash F_1) = \lambda(F_2) - \lambda(F_1)$ nicht. Es folgt

$$\partial E = \overline{E} \backslash \text{int}(E) \subset F_2 \backslash F_1 \quad \Rightarrow \quad \overline{\text{vol}}^n(\partial E) \leq \lambda^n(F_2 \backslash F_1) < \varepsilon.$$

Sei jetzt umgekehrt $\overline{\text{vol}}^n(\partial E) = 0$, das heißt zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Figur $F \supset \partial E$ mit $\lambda^n(F) < \varepsilon$. Indem wir $F$ als endliche Vereinigung von Quadern schreiben und deren Kanten etwas vergrößern, können wir annehmen, dass $F$ offen und damit $\mathbb{R}^n \backslash F$ abgeschlossen ist. Damit erhalten wir

$$m_0 := \inf_{\mathbb{R}^n \backslash F} f > 0 \quad \text{für } f(x) = \max\{\text{dist}\,(x, E), \text{dist}\,(x, \mathbb{R}^n \backslash E)\}.$$

Denn $f$ ist stetig und $f(x) \to \infty$ mit $|x| \to \infty$, da $E$ beschränkt. Da $\mathbb{R}^n \backslash F$ abgeschlossen ist, nimmt also $f$ das Infimum in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash F$ an. Wäre $f(x_0) = 0$ so folgt $x_0 \in \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^n \backslash E} = \partial E \subset F$, ein Widerspruch.

Wähle nun $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{-k}\sqrt{n} < m_0$. Jetzt verwende Lemma 1.25 und erhalte Figuren $F_k(E) \subset E \subset F^k(E)$, wobei nach (iii)

$$F^k(E) \backslash F_k(E) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 2^{-k}\sqrt{n}\}.$$

Es folgt $F^k(E) \backslash F_k(E) \subset F$ und folglich $\lambda^n(F^k(E) \backslash F_k(E)) \leq \lambda^n(F) < \varepsilon$ für $k$ hinreichend groß. Nach Lemma 1.20 ist damit $E$ quadrierbar. $\square$

# 2 Äußere Maße

In diesem Abschnitt wird der zentrale Begriff des (äußeren) Maßes $\mu$ eingeführt. Jeder Teilmenge $E$ einer Grundmenge $X$ wird dabei eine Maßzahl $\mu(E)$ zugeordnet, aber vernünftige Rechenregeln gelten nur auf einem gewissen Teilsystem, nämlich den messbaren Mengen. Die Definition der Messbarkeit mittels Testmengen stammt von Caratheodory. Das System der messbaren Mengen bildet eine $\sigma$-Algebra, ist also abgeschlossen unter abzählbaren Mengenoperationen. Allgemein steht in der Maßtheorie der Buchstabe $\sigma$ für „abzählbar unendlich“ in Abgrenzung zu „endlich“ . So ist die zentrale Eigenschaft eines Maßes, gegenüber dem in Kapitel 1 definierten Inhalt, die $\sigma$-Additivität, das heißt es gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

für jede abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten, messbaren Mengen $E_i$.

Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen zum Umgang mit den Symbolen $\infty$ (genauer: $+\infty$) und $-\infty$. Auf der erweiterten Zahlengeraden $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ sind die Ordnungsrelation $-\infty < a < \infty$ für $a \in \mathbb{R}$ und der Konvergenzbegriff auf naheliegende Weise gegeben.

**2.1 Definition (Konvergenz in $\overline{\mathbb{R}}$).** *Eine Folge $s_k \in \overline{\mathbb{R}}$ ($k \in \mathbb{N}$) konvergiert gegen $s \in \overline{\mathbb{R}}$, falls eine der folgenden Alternativen gilt:*

(i) *$s \in \mathbb{R}$, und für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $s_k \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ für $k$ hireichend groß.*

(ii) *$s = \infty$, und für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt $s_k \in (r, \infty]$ für $k$ hinreichend groß.*

(iii) *$s = -\infty$, und für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt $s_k \in [-\infty, r)$ für $k$ hinreichend groß.*

Eine Folge $s_k \in \mathbb{R}$ ist genau dann in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in $\mathbb{R}$ konvergiert oder bestimmt divergiert gegen $\infty$ bzw. gegen $-\infty$. Der Grenzwert einer monoton wachsenden Folge, bzw. einer Reihe mit nichtnegativen Gliedern, ist also immer existent. Die Addition wird wie folgt auf $\overline{\mathbb{R}}$ fortgesetzt:

| $+$ | $-\infty$ | $\mathbb{R}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-$ |
| $\mathbb{R}$ | $-\infty$ | $\mathbb{R}$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

Schließlich verwenden wir die Vereinbarungen

$$\sup \emptyset = -\infty \quad \text{und} \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

Diese sind konsistent mit der Tatsache, dass für Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ stets gilt:

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \sup A \leq \sup B \quad \text{sowie} \quad \inf A \geq \inf B.$$

**2.2 Definition (Maß).** *Sei $X$ eine Menge. Eine Funktion $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt (äußeres) Maß auf $X$, falls gilt:*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{2.3}$$

**2.4 Bemerkung.** *In dieser Vorlesung werden die Begriffe „äußeres Maß" und „Maß" synonym benutzt. Viele Autoren machen hier einen Unterschied, der am Ende von Kapitel 3 erläutert wird.*

Für eine endliche Überdeckung folgt aus Definition 2.2, indem wir $A_i = \emptyset$ für $i > k$ setzen,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

Insbesondere ergibt sich

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B) \quad (\text{Monotonie von } \mu). \tag{2.5}$$

Weiter haben wir

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (\sigma\text{-Subadditivität}). \tag{2.6}$$

Umgekehrt folgt aus (2.5) und (2.6) offensichtlich die Eigenschaft (2.3).

**2.7 Beispiel.** Der äußere Jordansche Inhalt $\overline{\mathrm{vol}}^1$ ist kein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$. Mit der Abzählung $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{q_k\}$ gilt nämlich, vgl. Beispiel 1.23,

$$\overline{\mathrm{vol}}^1(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1 > 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mathrm{vol}}^1(\{q_k\}).$$

Auch der innere Jordansche Inhalt $\underline{\mathrm{vol}}^1$ ist kein äußeres Maß. Denn mit $E_k = [0,1] \backslash \bigcup_{i=k}^{\infty} \{q_i\}$ gilt, da $\{q_k, q_{k+1}, \ldots\}$ dicht in $[0,1]$ ist,

$$[0,1] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad \text{aber} \quad \underline{\mathrm{vol}}^1([0,1]) = 1 > 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\mathrm{vol}}^1(E_k).$$

**2.8 Definition (Messbarkeit).** *Sei $\mu$ äußeres Maß auf $X$. Die Menge $A \subset X$ heißt $\mu$-messbar, falls gilt*

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \backslash A) \quad \text{für alle } S \subset X. \tag{2.9}$$

*Das System aller $\mu$–messbaren Mengen wird mit $\mathcal{M}$ bezeichnet.*

Da $S = (S \cap A) \cup (S \backslash A)$, folgt aus (2.6) die umgekehrte Ungleichung in (2.9), das heißt es gilt

$$A \quad \text{messbar} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \backslash A) \quad \forall S \subset X. \tag{2.10}$$

Wir wollen die Definitionen nun an ein paar einfachen Beispielen betrachten.

**2.11 Beispiel.** Für einen Punkt $x \in X$ ist das zugehörige Diracmaß gegeben durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\delta_x(A) \in \{0,1\}$ und $\delta_x(\emptyset) = 0$ per Definition. Ist eine Überdeckung $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}$ gegeben und ist $x \in A$, so folgt $x \in A_k$ für (mindestens) ein $k$. Hieraus folgt die Eigenschaft (2.3), denn im Fall $x \notin A$ gilt ohnehin $\delta_x(A) = 0$. Alle Mengen $A \subset X$ sind messbar bzgl. $\delta_x$. Ist nämlich $x \notin S$ so sind beide Seiten in (2.9) Null, und für $x \in S$ liegt $x$ in genau einer der Mengen $S \cap A$ bzw. $S \backslash A$.

**2.12 Beispiel.** Sei $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Auf einer Menge $X$ definieren wir das Zählmaß $\mathrm{card} : 2^X \to [0, +\infty]$ durch

$$\mathrm{card}(A) = \begin{cases} \sup\{n \in \mathbb{N} : \ \exists \text{ injektive Abbildung } \varphi : N_n \to A\} & \text{falls } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Um die Maßeigenschaft (2.3) für card zu zeigen, erinnern wir an das Schubfachprinzip

$$\varphi : N_n \to N_m \text{ injektiv} \quad \Rightarrow \quad n \leq m.$$

Dies wird durch Induktion über $m$, jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$, bewiesen. Der Induktionsanfang $m = 1$ ist trivial. Ist eine injektive Abbildung $\varphi : N_n \to N_{m+1}$ gegeben, wobei $m \geq 1$ und oBdA $n \geq 2$, so erhalten wir die Injektion

$$\varphi' : N_{n-1} \to N_m,\ \varphi'(i) = \begin{cases} \varphi(i) & \text{falls } \varphi(i) \neq m+1, \\ \varphi(n) & \text{falls } \varphi(i) = m+1. \end{cases}$$

Es folgt induktiv $n - 1 \leq m$, also $n \leq m + 1$. Insbesondere gilt $\mathrm{card}(N_n) = n$ für $n \in \mathbb{N}$. Ist $\mathrm{card}(A) = n \in \mathbb{N}$, so gibt es eine Injektion $\varphi : N_n \to A$ und diese ist sogar bijektiv, denn andernfalls gäbe es eine Injektion $\varphi' : N_{n+1} \to A$.

Wir behaupten nun zunächst

$$\operatorname{card}(A_1 \cup A_2) \leq \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2).$$

Dazu können wir annehmen, dass $\operatorname{card}(A_i) = \nu_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, 2$, das heißt es gibt Bijektionen $\varphi_i : N_{\nu_i} \to A_i$. Ist eine injektive Abbildung $\varphi : N_k \to A_1 \cup A_2$ gegeben, so definieren wir

$$\Phi : N_k \to N_{\nu_1+\nu_2},\ \Phi(i) = \begin{cases} \varphi_1^{-1}(\varphi(i)) & \text{falls } \varphi(i) \in A_1 \\ \nu_1 + \varphi_2^{-1}(\varphi(i)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung $\Phi$ ist wohldefiniert und injektiv, also folgt aus dem Schubfachprinzip $k \leq \nu_1 + \nu_2$, was zu zeigen war. Daraus ergibt sich weiter die $\sigma$-Subadditivität

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{card}(A_i).$$

Denn ist die rechte Seite endlich, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A_i = \emptyset$ für alle $i > k$, und die endliche Ungleichung $\operatorname{card}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{card}(A_i)$ folgt aus dem oben behandelten Fall $k = 2$ sofort durch Induktion. Aus der Definition folgt außerdem die Monotonie

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B).$$

Damit ist gezeigt, dass card ein äußeres Maß ist.

Wir behaupten weiter, dass alle Mengen $A \subset X$ card-messbar sind. Wähle dazu für $S \subset X$, oBdA $\operatorname{card}(S) < \infty$, Bijektionen $\varphi_1 : N_{\nu_1} \to S \cap A$ und $\varphi_2 : N_{\nu_2} \to S \backslash A$ und setze

$$\varphi : N_{\nu_1+\nu_2} \to S,\ \varphi(i) = \begin{cases} \varphi_1(i) & \text{falls } i \in \{1, \ldots, \nu_1\} \\ \varphi_2(i - \nu_1) & \text{falls } i \in \{\nu_1 + 1, \ldots, \nu_1 + \nu_2\}. \end{cases}$$

Die Abbildung $\varphi$ ist wohldefiniert und injektiv, also schließen wir

$$\operatorname{card}(S) \geq \nu_1 + \nu_2 = \operatorname{card}(S \cap A) + \operatorname{card}(S \backslash A).$$

**2.13 Beispiel.** Auf jeder Menge $X$ erhalten wir ein blödes Maß $\beta$ durch

$$\beta(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Nachweis von (2.3) für $\beta$ ist trivial. Es sind nur $\emptyset$ und $X$ $\beta$-messbar, denn mit der Wahl $S = X$ in (2.9) folgt, falls $A \subset X$ $\beta$-messbar ist,

$$1 \geq \beta(X) = \beta(A) + \beta(X \backslash A).$$