2.14 Beispiel. Für eine Familie μ_λ, $\lambda \in \Lambda$ von äußeren Maßen auf X sei

$$\mu(A) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda(A).$$

Dann ist μ ein äußeres Maß auf X, denn für $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und festes $\lambda \in \Lambda$ gilt

$$\mu_\lambda(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\lambda(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Bilde nun auf der linken Seite das Supremum über alle $\lambda \in \Lambda$ und erhalte (2.3). Es ist im allgemeinen nicht klar, welche Mengen bzgl. μ messbar sind.

Die folgenden beiden Konstruktionen von Maßen werden öfters benutzt.

2.15 Satz (Bildmaß). *Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$. Für ein gegebenes äußeres Maß $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ erhält man ein äußeres Maß $f(\mu)$ auf Y durch*

$$f(\mu) : 2^Y \to [0, \infty],\ f(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

$f(\mu)$ heißt Bildmaß von μ unter f, und es gilt für alle $B \subset Y$

$$f^{-1}(B)\ \mu\text{-messbar} \quad \Rightarrow \quad B\ f(\mu)\text{-messbar}\,. \tag{2.16}$$

Beweis: Für $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ gilt $f^{-1}(B) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)$ und folglich nach Definition 2.3

$$f(\mu)(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\big(f^{-1}(B_i)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\mu)(B_i).$$

Außerdem ist trivialerweise $f(\mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Nun ist nach Definition von $f(\mu)$ die Menge $B \subset Y$ genau dann $f(\mu)$-messbar, wenn gilt:

$$\mu(f^{-1}(T)) \geq \mu(f^{-1}(T \cap B)) + \mu(f^{-1}(T \backslash B)) \quad \text{für alle } T \subset Y.$$

Da $f^{-1}(T \cap B) = f^{-1}(T) \cap f^{-1}(B)$ sowie $f^{-1}(T \backslash B) = f^{-1}(T) \backslash f^{-1}(B)$, ist dies äquivalent zu

$$\mu(f^{-1}(T)) \geq \mu(f^{-1}(T) \cap f^{-1}(B)) + \mu(f^{-1}(T) \backslash f^{-1}(B)) \quad \text{für alle } T \subset Y.$$

Dagegen ist $f^{-1}(B)$ genau dann μ-messbar, wenn

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap f^{-1}(B)) + \mu(S \backslash f^{-1}(B)) \quad \text{für alle } S \subset X.$$

Also folgt die Behauptung (2.16), indem wir $S = f^{-1}(T)$ setzen. □

2.17 Satz (Einschränkung). *Sei $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X. Für eine gegebene Menge $M \subset X$ erhält man ein äußeres Maß $\mu \llcorner M$ auf X durch*

$$\mu \llcorner M : 2^X \to [0, \infty],\ \mu \llcorner M(A) = \mu(A \cap M).$$

$\mu \llcorner M$ heißt Einschränkung von μ auf M, und es gilt

$$A\ \mu\text{-messbar} \quad \Rightarrow \quad A\ \mu \llcorner M\text{-messbar}. \tag{2.18}$$

Beweis: Aus der Definition folgt sofort, dass $\mu\llcorner M$ ein äußeres Maß ist, denn für $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt:

$$\mu\llcorner M(A) = \mu(A \cap M) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap M) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\llcorner M(A_i).$$

Weiter gilt für $A \subset X$ μ-messbar und $S \subset X$ beliebig

$$\begin{aligned}\mu\llcorner M(S) &= \mu(S \cap M) \\ &= \mu((S \cap M) \cap A) + \mu((S \cap M)\backslash A) \quad \text{(da } A \text{ } \mu\text{-messbar)} \\ &= \mu((S \cap A) \cap M) + \mu((S\backslash A) \cap M) \\ &= \mu\llcorner M(S \cap A) + \mu\llcorner M(S\backslash A).\end{aligned}$$

Dies beweist Behauptung (2.18). □

2.19 Satz (Stetigkeitseigenschaften von Maßen). *Seien $A_1, A_2, \ldots$ messbar bzgl. des äußeren Maßes μ auf X.*

(i) *Für paarweise disjunkte Mengen A_i gilt:*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (\sigma - \textit{Additivität})$$

(ii) *Für $A_1 \subset \ldots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \ldots$ gilt:*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) \qquad (\textit{Stetigkeit von unten})$$

(iii) *Für $A_1 \supset \ldots \supset A_i \supset A_{i+1} \ldots,$ mit $\mu(A_1) < \infty$ gilt:*

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) \qquad (\textit{Stetigkeit von oben}).$$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass endliche Durchschnitte und Vereinigungen μ-messbarer Mengen wieder μ-messbar sind.
Offensichtlich ist X μ–messbar, da für alle $S \subseteq X$ gilt: $S \cap X = S$ und $S \setminus X = \emptyset$. Da

$$S \cap (X \setminus A) = S \setminus A\,, \quad S \setminus (X \setminus A) = S \cap A$$

gilt, ist das Komplement $X\backslash A$ einer μ–messbaren Menge A wieder μ–messbar.
Seien A, B μ–messbar. Dann gilt für alle $S \subseteq X$

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)\,, \\ \mu(S \cap A) &= \mu(S \cap A \cap B) + \mu((S \cap A) \setminus B)\,.\end{aligned}$$

Wenn man $S \setminus (A \cap B)$ als Testmenge wählt und die Messbarkeit von A benutzt erhält man:

$$\begin{aligned} \mu(S \setminus (A \cap B)) &= \mu((S \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu((S \setminus (A \cap B)) \setminus A) \\ &= \mu((S \cap A) \setminus B) + \mu(S \setminus A) . \end{aligned}$$

Aus diesen drei Identitäten folgt sofort

$$\mu(S) = \mu(S \cap (A \cap B)) + \mu(S \setminus (A \cap B)) .$$

Mithilfe von Induktion erhält man also, dass endliche Durchschnitte μ–messbarer Mengen wiederum μ–messbar sind. Durch Komplementsbildung folgt, dass auch endliche Vereinigungen μ–messbarer Mengen μ–messbar sind. In der Tat gilt:

$$\bigcup_j A_j = X \setminus \big(X \setminus \bigcup_j A_j\big) = X \setminus \big(\bigcap_j (X \setminus A_j)\big) .$$

Für μ-messbare Mengen A, B ist auch $A \setminus B$ μ-messbar, da $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ gilt. Nun können wir die eigentlichen Aussagen des Satzes beweisen.
(i) Seien A_j paarweise disjunkte μ–messbare Mengen. Wählt man $S = A_1 \cup A_2$ und benutzt die Messbarkeit von A_1 erhält man

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) ,$$

und über Induktion die analoge Aussage für endliche disjunkte Vereinigungen. Also gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \le \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) ,$$

wobei wir die Monotonie von μ benutzt haben. Die umgekehrte Ungleichung gilt aufgrund von (2.6) immer, und somit haben wir (i) bewiesen.
(ii) Sei (A_k) eine monoton aufsteigende Folge μ–messbarer Mengen, d.h. $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq \ldots$. Dann sind $\widetilde{A}_1 = A_1$, $\widetilde{A}_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$, $k \ge 2$, paarweise disjunkt, messbar und es gilt: $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} \widetilde{A}_i$. Somit erhalten wir unter Verwendung von (i)

$$\begin{aligned} \mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) &= \mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{A}_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\widetilde{A}_i) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(\widetilde{A}_i) = \lim_{k\to\infty} \mu\big(\bigcup_{i=1}^{k} \widetilde{A}_i\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k), \end{aligned}$$

d.h. Aussage (ii) gilt.

(iii) Sei $(A_k) \subseteq \mathcal{M}$ eine monoton fallende Folge mit $\mu(A_1) < \infty$, d.h. $A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_k \supseteq A_{k+1} \supseteq \ldots$. Für die aufsteigende Folge $A'_k = A_1 \backslash A_k$ gilt, da A_k μ-messbar,

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_k) + \mu(A_1 \backslash A_k) = \mu(A_k) + \mu(A'_k).$$

Daraus folgt wegen (ii)

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A'_k) & \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\ &\geq \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right), \end{aligned}$$

wobei wir die Subadditivität von μ und $\mu(A_1) < \infty$ benutzt haben. Aufgrund der Monotonie von μ gilt

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \mu(A_k)$$

und somit

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

d.h. Aussage (iii) ist bewiesen. □

2.20 Beispiel. Die Bedingung $\mu(A_1) < \infty$ in (iii) kann natürlich durch $\mu(A_k) < \infty$ für ein k ersetzt werden. Sie kann aber nicht ganz weggelassen werden. Mit $A_k = \{k, k+1, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ gilt zum Beispiel $\operatorname{card}(A_k) = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\operatorname{card}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \operatorname{card}(\emptyset) = 0$.

Wir wollen nun allgemein die Struktur des Systems $\mathcal{M}$ der μ-messbaren Mengen untersuchen.

2.21 Definition (Nullmenge). *Sei μ äußeres Maß auf X. Die Menge $N \subset X$ heißt μ-Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$.*

2.22 Satz (Messbarkeit von Nullmengen). *Sei μ äußeres Maß auf X. Dann gilt:*

$$N \textit{ Nullmenge} \Rightarrow N \ \mu\textit{-messbar} \tag{2.23}$$

$$N_1, N_2, \ldots \textit{ Nullmengen} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \textit{ Nullmenge.} \tag{2.24}$$

Beweis: Sei $\mu(N) = 0$. Für $S \subset X$ folgt aus der Monotonie $\mu(S \cap N) \leq \mu(N) = 0$, also

$$\mu(S) \geq \mu(S \backslash N) = \mu(S \cap N) + \mu(S \backslash N).$$

Die zweite Aussage gilt nach Definition 2.2. □

Somit enthält $\mathcal{M}$ alle Nullmengen $N \subset X$, und damit auch deren Komplemente $X \backslash N$, wie im Beweis von Satz 2.19 gezeigt wurde. Es kann sein, dass keine anderen Mengen messbar sind, zum Beispiel ist $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ in Beispiel 2.13. Aber in den relevanten Fällen erwarten wir doch, dass es viele weitere messbare Mengen gibt. Jedenfalls ist das System $\mathcal{M}$ unter abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten abgeschlossen, im Gegensatz zum Beispiel zu den quadrierbaren Mengen $\mathcal{Q}^n$ aus Satz 1.22. Dies soll nun gezeigt werden.

2.25 Definition (σ-Algebra). *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^X$ heißt σ-Algebra, wenn gilt:*

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_i \in \mathcal{A}$ *für* $i \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist auch unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen, das heißt es gilt

$$A_i \in \mathcal{A} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}. \tag{2.26}$$

Dies folgt sofort aus der Darstellung $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X \backslash A_i\right)$. Außerdem stellen wir fest: jede σ-Algebra ist ein Ring, denn nach Definition gilt $\emptyset = X \backslash X \in \mathcal{A}$ sowie

$$A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \backslash B = A \cap (X \backslash B) \in \mathcal{A}.$$

2.27 Satz (σ-Algebra der messbaren Mengen). *Sei $\mu : X \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist das System $\mathcal{M}$ der μ-messbaren Mengen eine σ-Algebra.*

Beweis: Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 2.25 wurden bereits im Beweis von Satz 2.19 gezeigt. Jetzt zeigen wir die noch fehlende Eigenschaft

$$A_i \in \mathcal{M} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}.$$

Wir setzten $B_j = \bigcup_{k=1}^{j} A_k$. Somit ist B_j eine monoton aufsteigende Folge messbarer Mengen und es gilt $\bigcup_k A_k = \bigcup_k B_k$. Für $S \subseteq X$ beliebig, mit $\mu(S) < \infty$ gilt mithilfe von Satz 2.17 und Satz 2.19:

$$\begin{aligned}\mu\left(S\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)+\mu\left(S\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)&=\mu\llcorner S\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k)\right)+\mu\llcorner S\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(X\setminus B_k)\right)\\&=\lim_{k\to\infty}\mu\llcorner S\,(B_k)+\lim_{k\to\infty}\mu\llcorner S\,(X\setminus B_k)\\&=\mu(S)\,.\end{aligned}$$

Für $\mu(S)=\infty$ gilt offensichtlich $\mu\left(S\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)+\mu\left(S\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\leq\mu(S)$. Somit ist $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ messbar und der Satz ist bewiesen. $\square$

3 Der Fortsetzungssatz von Caratheodory

Der elementargeometrische Inhalt liefert eine vernünftige Definition des n-dimensionalen Volumens auf der Klasse der Quader $\mathcal{P}^n$ oder der Klasse der Figuren $\mathcal{F}^n$. Wir stehen nun vor der Aufgabe, diesen Inhalt zu einem äußeren Maß auf das System aller Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ fortzusetzen, wobei die Mengen in $\mathcal{P}^n$ natürlich messbar sein sollen. In diesem Kapitel beschreiben wir in abstraktem Rahmen die Konstruktion der Maßfortsetzung nach Caratheodory und beantworten auch die Frage, in welchem Umfang die Fortsetzung eindeutig bestimmt ist. Die Spezialisierung auf das Volumenmaß im $\mathbb{R}^n$, genauer das Lebesguemaß, folgt im nächsten Kapitel.

3.1 Definition (Fortsetzung). *Sei λ ein Inhalt auf dem Halbring $\mathcal{P} \subset 2^X$. Ein äußeres Maß μ auf X heißt Fortsetzung von λ, falls folgende zwei Bedingungen gelten:*

(i) $\mu|_{\mathcal{P}} = \lambda$, *das heißt* $\mu(P) = \lambda(P)$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$

(ii) $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$, *also alle Mengen in* $\mathcal{P}$ *sind* μ*-messbar.*

Nach Aussage (i) in Satz 2.19 muss ein Inhalt, der zu einem äußeren Mass fortsetzbar ist, auf dem Halbring $\mathcal{P}$ notwendig σ-additiv sein. Hierfür wird die folgende Bezeichnung eingeführt.

3.2 Definition (Prämaß). *Sei $\mathcal{P} \subset 2^X$ ein Halbring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{P} \to [0,\infty]$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$ heißt Prämaß, wenn gilt: ist $P \in \mathcal{P}$ und $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ mit $P_i \in \mathcal{P}$ paarweise disjunkt, so folgt*

$$\lambda(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \quad (\sigma\text{-}\textit{Additivität auf } \mathcal{P}).$$

3.3 Lemma. *Ist $\lambda : \mathcal{P} \to [0,\infty]$ ein Prämaß, $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{P}$ erzeugte Ring und $\overline{\lambda} : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ der eindeutig bestimmte Inhalt mit $\overline{\lambda}|_{\mathcal{P}} = \lambda$ (siehe Satz 1.16), so ist $\overline{\lambda}$ ebenfalls ein Prämaß.*

Beweis: Habe $F \in \mathcal{R}$ die Darstellung $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ mit $F_i \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt. Nach Lemma 1.15 gibt es dann paarweise disjunkte Zerlegungen $F = \bigcup_{j=1}^{k} P_j$ und $F_i = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_i} P_{i,\nu}$ mit P_j, $P_{i,\nu} \in \mathcal{P}$. Es folgt die Darstellung

$$P_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} (P_j \cap F_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{\nu_i} (P_j \cap P_{i,\nu}).$$

Da λ Prämaß und $\overline{\lambda}$ Inhalt, folgt hieraus $\lambda(P_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu_i} \lambda(P_j \cap P_{i,\nu}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu_i} \overline{\lambda}(P_j \cap P_{i,\nu}) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda}(P_j \cap F_i)$, und somit

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(P_j) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda}(P_j \cap F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \overline{\lambda}(P_j \cap F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda}(F_i).$$

□

3.4 Satz (Caratheodory-Fortsetzung). *Sei $\lambda : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{P} \subset 2^X$. Definiere $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ durch*

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) : P_i \in \mathcal{P},\, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \right\}. \tag{3.5}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ. Man bezeichnet μ als das durch λ induzierte, äußere Maß oder als Caratheodory-Fortsetzung von λ.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $\mathcal{P}$ sogar ein Ring ist und zeigen in diesem Fall die Aussage in drei Schritten.

Schritt 1: *μ ist äußeres Maß*
Mit $P_i = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt $\mu(\emptyset) = 0$ nach (3.5). Sei $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E, E_i \subset X$ und oBdA $\mu(E_i) < \infty$. Wähle Überdeckungen $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{i,j}$ mit $P_{i,j} \in \mathcal{P}$, so dass zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_{i,j}) < \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt $E \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} P_{i,j}$ und somit

$$\mu(E) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda(P_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \big(\mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt $\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

Schritt 2: $\mu(P) = \lambda(P)$ *für* $P \in \mathcal{P}$.
Die Ungleichung $\mu(P) \leq \lambda(P)$ folgt direkt aus (3.5), indem wir $P_1 = P$ und $P_i = \emptyset$ für $i \geq 2$ wählen. Für die umgekehrte Ungleichung $\lambda(P) \leq \mu(P)$ reicht es zu zeigen:

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \text{ mit } P_i \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \lambda(P) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i).$$

Wir betrachten die paarweise disjunkten Mengen $Q_i = (P_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} P_j) \cap P \in \mathcal{P}$ und schließen

$$\lambda(P) = \lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i),$$

da λ Prämaß und $Q_i \subset P_i$.

Schritt 3: *Jedes $P \in \mathcal{P}$ ist μ-messbar*
Sei $P \in \mathcal{P}$ und $S \subset X$ beliebig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $P_i \in \mathcal{P}$, so dass $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \leq \mu(S) + \varepsilon$. Es folgt $S \cap P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (P_i \cap P)$ sowie $S \setminus P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (P_i \setminus P)$. Aus (3.5) erhalten wir

$$\mu(S \cap P) + \mu(S \setminus P) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i \cap P) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i \setminus P) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \leq \mu(S) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt Schritt 3 und der Satz ist bewiesen, wenn $\mathcal{P}$ ein Ring ist.

Sei nun $\mathcal{P}$ lediglich ein Halbring, und $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{P}$ erzeugte Ring. Nach Satz 1.16 gibt es einen eindeutig bestimmten Inhalt $\overline{\lambda} : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ mit $\overline{\lambda}|_{\mathcal{P}} = \lambda$, und $\overline{\lambda}$ ist ein Prämaß nach Lemma 3.3. Wir zeigen:

$$\text{Mit } \overline{\mu}(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda}(F_i) : F_i \in \mathcal{R},\, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\} \quad \text{gilt} \quad \overline{\mu} = \mu. \tag{3.6}$$

Für beliebiges $E \subset X$ ergibt sich die Ungleichung $\overline{\mu}(E) \leq \mu(E)$ direkt aus den Definitionen wegen $\overline{\lambda}|_{\mathcal{P}} = \lambda$. Ist andererseits $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ mit $F_i \in \mathcal{R}$, so gibt es nach Lemma 1.15 eine Darstellung $F_i = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_i} P_{i,\nu}$ mit paarweise disjunkten $P_{i,\nu} \in \mathcal{P}$, und es folgt

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu_i} \lambda(P_{i,\nu}) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda}(F_i).$$

Durch Bilden des Infimums über alle Überdeckungen $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ mit $F_i \in \mathcal{R}$ folgt die umgekehrte Ungleichung $\mu(E) \leq \overline{\mu}(E)$. Nun ist, wie oben gezeigt, $\overline{\mu}$ Fortsetzung von $\overline{\lambda}$ und damit folgt aus (3.6) die Behauptung des Satzes. □

Natürlich schließt sich die Frage der Charakterisierung der μ-messbaren Mengen an. Laut Satz 3.4 sind zunächst alle Mengen in $\mathcal{P}$ μ-messbar, aber dann nach Satz 2.27 auch alle abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitte dieser Mengen, und dann wiederum deren abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte, und so fort. Um dies umfassend zu beschreiben, ist der folgende Begriff zweckmäßig.

3.7 Definition (erzeugte σ-Algebra). *Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset 2^X$ sei*

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \textit{ ist } \sigma\textit{-Algebra in } X \textit{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}. \tag{3.8}$$

Dann ist $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, und heißt die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. Es gilt

$$\mathcal{A} \ \sigma\textit{-Algebra mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}. \tag{3.9}$$

3.10 Beispiel. Ist $E \subset X$ und $\mathcal{E} = \{E\}$, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \backslash E, X\}$.

Während wir für den erzeugten Ring eine einfache konstruktive Beschreibung in Satz 1.14 angeben konnten, ist das für die erzeugte σ-Algebra im Allgemeinen nicht möglich, siehe hierzu Elstrodt. Die Anwendung der Definition stützt sich deshalb stets auf die Eigenschaft (3.9), dass nämlich $\sigma(\mathcal{E})$ – salopp gesprochen – die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}$ enthält.

3.11 Lemma. *Sei $\lambda : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ ein Prämaß. Ist das äußere Maß $\widetilde{\mu}$ eine Fortsetzung von λ, so ist jede Menge $A \in \sigma(\mathcal{P})$ $\widetilde{\mu}$-messbar.*

Beweis: Nach Satz 2.27 ist das System $\widetilde{\mathcal{M}}$ der $\widetilde{\mu}$-messbaren Mengen eine σ-Algebra, die nach Definition $\mathcal{P}$ enthält. Also folgt $\sigma(\mathcal{P}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ aus (3.9). □

3.12 Definition (Regularität). *Eine äußeres Maß $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ heißt regulär, wenn es zu jeder Menge $D \subset X$ eine μ-messbare Menge $E \subset X$ gibt mit $D \subset E$ und $\mu(E) = \mu(D)$.*

3.13 Satz (Regularität der Caratheodory-Fortsetzung). *Sei $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ die Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{P} \to [0, \infty]$. Dann gibt es zu jeder Menge $D \subset X$ eine Menge $E \in \sigma(\mathcal{P})$ mit $E \supset D$ und $\mu(E) = \mu(D)$. Insbesondere ist μ ein reguläres Maß.*

Beweis: Im Fall $\mu(D) = \infty$ können wir $E = X$ wählen. Ist $\mu(D) < \infty$, so gibt es nach Definition von μ in (3.5) zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung

$$D \subset E^\nu = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i^\nu \text{ mit } P_i^\nu \in \mathcal{P} \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda(P_i^\nu) < \mu(D) + \frac{1}{\nu}.$$

Wähle $E = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} E^\nu$. Dann ist $E \in \sigma(\mathcal{P})$ mit $E \supset D$, und für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu(D) \le \mu(E) \le \mu(E^\nu) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i^\nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i^\nu) \le \mu(D) + \frac{1}{\nu} < \infty,$$

das heißt $\mu(E) = \mu(D)$. □

Für gewisse Eigenschaften der Caratheodory-Fortsetzung wird folgende Bedingung benötigt.

3.14 Definition (σ-endliches Prämaß). *Ein Prämaß λ auf einem Halbring $\mathcal{P} \subset 2^X$ heißt σ-endlich, wenn es eine Folge $P_n \in \mathcal{P}$ gibt mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ und $\lambda(P_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Das Zählmaß auf X ist genau dann σ-endlich, wenn X abzählbar ist, und das Prämaß λ aus Beispiel 3.18 unten ist nicht σ-endlich.

3.15 Lemma. *Sei λ ein σ-endliches Prämaß auf X mit Caratheodory-Fortsetzung μ. Dann hat jede μ-messbare Menge $D \subset X$ eine Darstellung $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ für μ-messbare D_n mit $\mu(D_n) < \infty$ und $D_1 \subset D_2 \subset \dots$.*

Beweis: Sei $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ wie in Definition 3.14. Setze dann $D_n = \bigcup_{k=1}^{n} D \cap P_k$. □

Wir können nun im σ-endlichen Fall die bezüglich der Caratheodory-Fortsetzung messbaren Mengen genau charakterisieren. Die im Zusatz gegebene Präzisierung werden wir beim Beweis des Cavalierischen Prinzips in Satz 7.6 verwenden.

3.16 Satz (Messbarkeit bzgl. Caratheodory-Fortsetzung). *Sei $\lambda : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ ein σ-endliches Prämaß auf X mit Caratheodory-Fortsetzung μ. Eine Menge $D \subset X$ ist genau dann μ-messbar, wenn eine der folgenden Bedingugen gilt:*

(i) *Es gibt ein $E \in \sigma(\mathcal{P})$ mit $E \supset D$ und $\mu(E \backslash D) = 0$.*

(ii) *Es gibt ein $C \in \sigma(\mathcal{P})$ mit $C \subset D$ und $\mu(D \backslash C) = 0$.*

Zusatz: *Im Fall $\mu(D) < \infty$ kann $E = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} E^{\nu}$ gewählt werden, wobei $E^{\nu} = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i^{\nu}$ paarweise disjunkte Vereinigung von Mengen $P_i^{\nu} \in \mathcal{P}$ mit $E^1 \supset E^2 \supset \dots$ und $\mu(E^1) < \infty$.*

Beweis: Sei $D \subset X$, so dass (i) gilt. Für beliebige $T \subset X$ folgt aus $T \setminus E \subset T \setminus D = (T \setminus E) \cup (T \cap (E \setminus D))$

$$\begin{aligned}\mu(T \setminus E) \leq \mu(T \setminus D) &\leq \mu(T \setminus E) + \mu(T \cap (E \setminus D)) \\ &\leq \mu(T \setminus E) + \mu(E \setminus D) = \mu(T \setminus E)\end{aligned}$$

und somit $\mu(T \setminus E) = \mu(T \setminus D)$. Analog folgt $\mu(T \cap D) = \mu(T \cap E)$. Da E μ–messbar ist, folgt somit

$$\mu(T) = \mu(T \cap E) + \mu(T \setminus E) = \mu(T \cap D) + \mu(T \setminus D),$$

d.h. D ist μ–messbar. Analog folgt aus (ii), dass D μ–messbar ist.
Für die umgekehrte Implikation sei zunächst D messbar mit $\mu(D) < \infty$. Wir wählen $E \supset D$ aus Satz 3.13. Es folgt aufgrund der Messbarkeit von D

$$\mu(D) = \mu(E) = \mu(E \cap D) + \mu(E \backslash D) = \mu(D) + \mu(E \backslash D) \quad \Rightarrow \quad \mu(E \backslash D) = 0.$$

Für beliebiges messbares D sei $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ wie in Lemma 3.15. Wie bewiesen gibt es $E_n \supset D_n$ mit $E_n \in \sigma(\mathcal{P})$ und $\mu(E_n \backslash D_n) = 0$. Für $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset D$ folgt $E \in \sigma(\mathcal{P})$. Da $E \setminus D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus D_n)$ folgt