$$\mu(E \backslash D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \backslash D_n) = 0.$$

Damit ist Aussage (i) gezeigt. Um (ii) zu zeigen, wähle mit Satz 3.13 eine μ-Nullmenge $N \in \sigma(\mathcal{P})$ mit $N \supset E \backslash D$, wobei E wie in (i) gewählt wurde, und setze $C = E \backslash N \in \sigma(\mathcal{P})$. Es folgt

$$C = E \backslash N \subset E \backslash (E \backslash D) = D \quad \text{und} \quad \mu(D \backslash C) = \mu(D \cap N) = 0.$$

Um den Zusatz zu beweisen sei nun $\mu(D) < \infty$. Die Konstruktion im Beweis von Satz 3.13 liefert die Darstellung $E = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} E^\nu$ mit $E^\nu = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i^\nu$ für $P_i^\nu \in \mathcal{P}$, wobei $\mu(E^1) \leq \mu(D) + 1 < \infty$. Das System aller abzählbaren Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{P}$ ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten, denn es gilt $(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i) = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} P_i \cap Q_j$. Indem wir zu $\widetilde{E}^\nu = E^1 \cap \ldots \cap E^\nu$ übergehen, können wir deshalb $E^1 \supset E^2 \supset \ldots$ annehmen. Für festes ν sind die Mengen $\widetilde{P}_i^\nu = P_i^\nu \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} P_j^\nu$ paarweise disjunkt und es gilt $E^\nu = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i^\nu = \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}_i^\nu$. In Lemma 1.13 wurde gezeigt, dass $\widetilde{P}_i^\nu$ als paarweise disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{P}$ darstellbar ist. Damit ist auch der Zusatz bewiesen. □

Nachdem die Maßfortsetzung konstruiert ist und auch die messbaren Mengen identifiziert sind, stellt sich zu guter letzt die Frage, inwieweit das gefundene Maß eindeutig bestimmt ist bzw. durch welche Eigenschaften die gegebene Konstruktion ausgezeichnet ist. Direkt aus der Definition ergibt sich die folgende Charakterisierung:

3.17 Lemma (Maximalität der Caratheodory-Fortsetzung). *Sei μ die Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{P} \to [0,\infty]$ auf X. Dann gilt für jede andere Fortsetzung $\widetilde{\mu}$ von λ*

$$\widetilde{\mu}(E) \leq \mu(E) \quad \textit{für alle } E \subset X.$$

Beweis: Es gilt die Implikation

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \text{ mit } P_i \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i).$$

Bilden des Infimums über alle solchen Überdeckungen liefert wegen (3.5) die Behauptung. □

Im nicht σ-endlichen Fall kann es Fortsetzungen geben, die auf der erzeugten σ-Algebra verschieden sind. Hier ist ein Standardbeispiel.

3.18 Beispiel. Betrachte auf $X \neq \emptyset$ das Prämaß $\lambda : \mathcal{P} = \{\emptyset\} \to [0,\infty]$, $\lambda(\emptyset) = 0$. Definiere für $t \in [0,\infty]$

$$\mu_t : 2^X \to [0,\infty],\ \mu_t(E) = \begin{cases} 0 & \text{falls } E = \emptyset \\ t & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann sind alle μ_t Fortsetzungen von λ, die jedoch auf der von $\mathcal{P}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{P}) = \{\emptyset, X\}$ nicht gleich sind. Die Caratheodory-Fortsetzung ist μ_∞.

3.19 Satz (Eindeutigkeit der Maßfortsetzung). *Sei λ ein σ-endliches Prämaß auf einem Halbring $\mathcal{P}$ über X. Ist $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ die Caratheodory-Fortsetzung von λ und $\widetilde{\mu}$ eine beliebige Fortsetzung, so gilt*

$$E \ \mu\text{-messbar} \quad \Rightarrow \quad E \ \widetilde{\mu}\text{-messbar und } \widetilde{\mu}(E) = \mu(E).$$

Beweis: Seien $\mathcal{M}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{M}}$ die jeweiligen Systeme messbarer Mengen für μ bzw. $\widetilde{\mu}$. Nach Satz 3.16 (ii) gibt es zu $E \in \mathcal{M}$ ein $C \in \sigma(\mathcal{P})$ und eine μ-Nullmenge N mit $E = C \cup N$. Da $\widetilde{\mu}(N) \leq \mu(N) = 0$ nach Lemma 3.17, ist N $\widetilde{\mu}$-messbar nach Satz 2.22. Aber C ist ebenfalls $\widetilde{\mu}$-messbar nach Lemma 3.11, also ist E $\widetilde{\mu}$-messbar. Insbesondere gilt $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$.
Wir zeigen zunächst $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$ unter der zusätzlichen Annahme, dass $E = \bigcup_{i=1}^\infty P_i$ mit $P_i \in \mathcal{P}$. Sei $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{P}$ erzeugte Ring. Aufgrund der Definitionen und des bereits Gezeigten gilt $\mathcal{R} \subset \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$. Satz 2.19 (i) liefert, dass $\mu|\mathcal{R}$ und $\widetilde{\mu}|\mathcal{R}$ Inhalte sind. Diese sind nach Satz 1.16 eindeutig bestimmt und somit gilt $\mu|\mathcal{R} = \widetilde{\mu}|\mathcal{R}$. Dies und Satz 2.19 (ii) liefern dann

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n P_i\right) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^n P_i\right) = \widetilde{\mu}(E)\,. \tag{3.20}$$

Sei nun $E \in \mathcal{M}$ mit $\mu(E) < \infty$. Dann existieren Mengen $P_i \in \mathcal{P}$ mit $E \subset P := \bigcup_{i=1}^\infty P_i$ und $\mu(E) \leq \mu(P) + 1$. Aus Lemma 3.17 und (3.20) folgern wir

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}(E) + \widetilde{\mu}(P \backslash E) &\leq \mu(E) + \mu(P \backslash E) \\
&= \mu(P) \quad (\text{da } E \ \mu\text{–messbar}) \\
&= \widetilde{\mu}(P) \quad (\text{aufgrund von } (3.20)) \\
&\leq \widetilde{\mu}(E) + \widetilde{\mu}(P \backslash E) \quad (\text{da } E \ \widetilde{\mu}\text{–messbar}).
\end{aligned}$$

Somit gilt $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$ für alle $E \in \mathcal{M}$ mit $\mu(E) < \infty$, da in allen Abschätzungen Gleichheit gelten muss.
Sei nun $E \in \mathcal{M}$ beliebig. Nach Lemma 3.15 gilt $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ für μ-messbare E_n mit $\mu(E_n) < \infty$ und $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$. Es folgt wegen Satz 2.19 (ii)

$$\widetilde{\mu}(E) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E).$$

□

Zum Schluss kommen wir auf die in Bemerkung 2.4 erwähnten, verschiedenen Maßbegriffe zu sprechen. Bis zum Ende des Kapitels sprechen wir nun ausdrücklich von äußeren Maßen und verwenden den Begriff „Maß“ in folgendem Sinn:

3.21 Definition. *Ein Prämaß* $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *heißt Maß, wenn* $\mathcal{A} \subset 2^X$ *eine* σ*-Algebra ist. Das Tripel* $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ *heißt dann Maßraum.*

Für ein Maß λ ist nicht notwendig jede Teilmenge einer λ-Nullmenge ebenfalls in $\mathcal{A}$.

3.22 Definition (Vollständigkeit). *Ein Maß* $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *heißt vollständig, wenn folgende Implikation gilt:*

$$N \subset A \text{ für ein } A \in \mathcal{A} \text{ mit } \lambda(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad N \in \mathcal{A}.$$

Jedes Maß $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ kann wie folgt zu einem vollständigen Maß $\overline{\lambda} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ fortgesetzt werden:

$$D \in \overline{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \exists C, E \in \mathcal{A} \text{ mit } C \subset D \subset E \text{ und } \lambda(E \backslash C) = 0$$
$$\overline{\lambda}(D) := \lambda(C) \quad (= \lambda(E)).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\overline{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra und $\overline{\lambda} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ ein wohldefiniertes, vollständiges Maß mit $\overline{\lambda}|_{\mathcal{A}} = \lambda$ ist. Dieses wird als Vervollständigung von λ bezeichnet.

Jedem äußeren Maß μ kann durch Einschränkung auf das System $\mathcal{M}(\mu)$ der μ-messbaren Mengen das vollständige Maß $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ zugeordnet werden, siehe Satz 2.22. Umgekehrt liefert der Fortsetzungssatz von Caratheodory zu jedem Maß $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Fortsetzung durch ein reguläres, äußeres Maß $\lambda^C : 2^X \to [0, \infty]$, vgl. Satz 3.13. Wir wollen sehen, dass diese beiden Zuordnungen

$$\mu \longmapsto \big(\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}, \mathcal{M}(\mu)\big) \quad \text{ und } \quad (\lambda, \mathcal{A}) \longmapsto \lambda^C$$

zueinander invers sind. Dabei müssen wir uns allerdings jeweils auf den σ-endlichen Fall beschränken.

3.23 Definition. *Ein äußeres Maß* $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ *heißt* σ*-endlich, wenn* X *als abzählbare Vereingung* $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ *von* μ*-messbaren Mengen* X_i *mit* $\mu(X_i) < \infty$ *darstellbar ist.*

Nach Definition 3.14 ist μ genau dann σ-endlich, wenn das Maß $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ σ-endlich ist. Die Sätze 3.4, 3.13 und 3.19 sagen nun Folgendes aus:

Ist ein σ-endliches äußeres Maß μ gegeben, so ist das äußere Maß $\widetilde{\mu} := (\mu|_{\mathcal{M}(\mu)})^C$ regulär (Sätze 3.4, 3.13), hat als System messbarer Mengen genau die σ-Algebra $\mathcal{M}(\mu)$ der μ-messbaren Mengen und stimmt auf diesen mit μ überein (Sätze 3.19, 3.4). Offenbar ist $\widetilde{\mu}$ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt. Ist umgekehrt $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein σ-endliches Maß mit zugehöriger Caratheodory-Fortsetzung $\lambda^C : 2^X \to [0, \infty]$, so ist das Maß $\lambda^C|_{\mathcal{M}(\lambda^C)} : \mathcal{M}(\lambda^C) \to [0, \infty]$ genau die Vervollständigung $\overline{\lambda} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ von λ. Insbesondere ist damit bewiesen:

3.24 Satz. *Zu jedem σ-endlichen, vollständigen Maß $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ auf X gibt es genau ein σ-endliches, reguläres äußeres Maß $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ mit $\mathcal{M}(\mu) = \mathcal{A}$ und $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)} = \lambda$, nämlich die Caratheodory-Fortsetzung $\mu = \lambda^C$.*

4 Das n-dimensionale Lebesguemaß

Wir spezialisieren nun die allgemeinen Ausführungen des vorigen Kapitels und betrachten das Lebesguemaß auf dem n-dimensionalen Euklidischen Raum. Als erstes wird untersucht, in welcher Beziehung das System der Lebesgue-messbaren Mengen zu der gegebenen Topologie auf $\mathbb{R}^n$, also zu dem System der offenen Mengen, steht. Insbesondere ergibt sich daraus eine Charakterisierung der Lebesgue-messbaren Mengen. Zweitens wird die Invarianz des Lebesguemaßes unter Isometrien, das heißt Translationen und orthogonalen Transformationen, bewiesen, sowie allgemeiner eine Transformationsformel unter linearen Abbildungen. Zum Schluss geben wir ein Beispiel einer nicht Lebesgue-messbaren Menge in $\mathbb{R}$.

4.1 Lemma. *Der elementargeometrische Inhalt $\lambda^n : \mathcal{P}^n \to [0, \infty)$ ist ein Prämaß auf dem Halbring der Quader im $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Sei $P = \bigcup_{i=1}^\infty P_i$ mit $P, P_i \in \mathcal{P}^n$ und $P_i \cap P_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Nun ist λ^n ein Inhalt auf dem Ring der Figuren, siehe Satz 1.16, also gilt aufgrund der Monotonie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(P_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda^n(P_i) = \lim_{k\to\infty} \lambda^n\big(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\big) \leq \lambda^n(P).$$

Für die umgekehrte Ungleichung wähle zu $\varepsilon > 0$ offene Quader $Q_i \supset P_i$ und einen kompakten Quader $Q \subset P$, so dass gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(Q_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(P_i) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \lambda^n(P) < \lambda^n(Q) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Heine-Borel wird Q durch endlich viele Quader $Q_1, \ldots, Q_k$ überdeckt, und mit Folgerung 1.18 schließen wir

$$\lambda^n(P) < \lambda^n(Q) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda^n(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(P_i) + \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

4.2 Definition (Lebesguemaß). *Das Lebesguemaß einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch*

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(P_i) : P_i \text{ Quader}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \Big\}. \tag{4.3}$$

Damit ist $\mathcal{L}^n$ die Caratheodory-Fortsetzung des elementargeometrischen Inhalts λ^n auf dem Halbring $\mathcal{P}^n$ der Quader im $\mathbb{R}^n$.

4.4 Definition (Borelmenge). *Die vom System $\mathcal{O}^n$ der offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra heißt Borelalgebra $\mathcal{B}^n$, ihre Elemente heißen Borelmengen.*

4.5 Lemma. *$\mathcal{B}^n$ ist die vom Halbring $\mathcal{P}^n$ der Quader erzeugte σ-Algebra.*

Beweis: Wir zeigen als erstes, dass jeder Quader eine Borelmenge ist. Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist entweder offen oder läßt sich als abzählbarer Schnitt $I = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ von offenen Intervallen U_k schreiben und liegt damit in $\mathcal{B}^1$, zum Beispiel gilt $[a,b) = \bigcap_{k=1}^{\infty}(a - \frac{1}{k}, b)$. Für einen Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ schreiben wir $I_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{j,k}$ und erhalten $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty}(U_{1,k} \times \ldots \times U_{n,k}) \in \mathcal{B}^n$. Daraus folgt $\mathcal{P}^n \subset \mathcal{B}^n$ und folglich $\sigma(\mathcal{P}^n) \subset \mathcal{B}^n$.
Nun ist andererseits nach Lemma 1.25 jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Würfeln darstellbar. Also gilt $\mathcal{O}^n \subset \sigma(\mathcal{P}^n)$ und somit $\mathcal{B}^n \subset \sigma(\mathcal{P}^n)$. □

4.6 Satz ($\mathcal{L}^n$-Messbarkeit der Borelmengen). *Für das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ gilt:*

(i) *Alle Borelmengen sind Lebesgue-messbar.*
(ii) *Zu $E \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine Borelmenge $B \supset E$ mit $\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{L}^n(E)$.*
(iii) *$\mathcal{L}^n(K) < \infty$ für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.*

Beweis: Sei $\mathcal{M}^n$ das System der $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen. Dann gilt $\mathcal{P}^n \subset \mathcal{M}^n$ nach Satz 3.4, also $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{P}^n) \subset \mathcal{M}^n$ nach Lemma 4.5 und Satz 2.27.
Aussage (ii) gilt nach Satz 3.13. Da $\mathcal{L}^n = \lambda^n$ auf Quadern, gilt für beliebiges $a > 0$ $\mathcal{L}^n([-a,a]^n) = \lambda^n([-a,a]^n) = (2a)^n < \infty$, und (iii) folgt. □

4.7 Lemma (Approximationslemma). *Für eine beliebige Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

(i) *$\mathcal{L}^n(E) = \inf\{\mathcal{L}^n(U) : U$ offen, $U \supset E\}$,*
(ii) *$\mathcal{L}^n(E) = \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K$ kompakt, $K \subset E\}$, falls E $\mathcal{L}^n$-messbar.*

Beweis: Offensichtlich gilt $\mathcal{L}^n(E) \le \inf\{\mathcal{L}^n(U) : U \text{ offen}, U \supset E\}$. Für die umgekehrte Ungleichung können wir $\mathcal{L}^n(E) < \infty$ annehmen. Nach Definition des Lebesguemaßes in (4.3) gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ mit Quadern P_i, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(P_i) < \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon.$$

Wir können annehmen, dass die P_i offen sind. Also ist $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ offen, es gilt $U \supset E$ und

$$\mathcal{L}^n(U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(P_i) < \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon.$$

In (ii) ist klar, dass $\mathcal{L}^n(E) \geq \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K \text{ kompakt}, K \subset E\}$. Wir zeigen die umgekehrte Ungleichung zunächst für E beschränkt. Wähle $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $E \subset K_0$. Nach (i) gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \supset K_0 \backslash E$ mit

$$\mathcal{L}^n(U) < \mathcal{L}^n(K_0 \backslash E) + \varepsilon = \mathcal{L}^n(K_0) - \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon.$$

Dabei wurde benutzt, dass E $\mathcal{L}^n$-messbar ist. Nun ist $K = K_0 \backslash U \subset K_0 \backslash (K_0 \backslash E) = E$ kompakt und wegen der $\mathcal{L}^n$-Messbarkeit von U folgt

$$\mathcal{L}^n(K) = \mathcal{L}^n(K_0) - \mathcal{L}^n(K_0 \cap U) \geq \mathcal{L}^n(K_0) - \mathcal{L}^n(U) > \mathcal{L}^n(E) - \varepsilon.$$

Für E beliebig betrachte $E_j = E \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq j\}$. E_j ist beschränkt und Lebesgue-messbar, also folgt aus obigem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(E_j) &\leq \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K \text{ kompakt}, K \subset E_j\} \\ &\leq \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K \text{ kompakt}, K \subset E\}. \end{aligned}$$

Aber $\mathcal{L}^n(E_j) \to \mathcal{L}^n(E)$ mit $j \to \infty$ nach Satz 2.19. Damit ist (ii) bewiesen. $\square$

Die $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen können nun wie folgt charakterisiert werden.

4.8 Satz (Messbarkeit bzgl. $\mathcal{L}^n$). *Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann $\mathcal{L}^n$-messbar, wenn eine der beiden Bedingungen gilt:*

(i) *Es gibt eine Borelmenge $E \supset D$ mit $\mathcal{L}^n(E \backslash D) = 0$.*

(ii) *Es gibt eine Borelmenge $C \subset D$ mit $\mathcal{L}^n(D \backslash C) = 0$.*

Es kann $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ mit U_i offen, $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_i$ mit A_i abgeschlossen gewählt werden.

Beweis: Die Äquivalenz von (i) bzw. (ii) mit der Messbarkeit von D wurde bereits im Satz 3.16 bewiesen. Wir geben hier einen alternativen Beweis, der auch die Charakterisierung von E und C liefert. Schreibe $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ mit $D_j = \{x \in D : j-1 \leq |x| < j\}$ für $j \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 4.7 gibt es offene Mengen $U_{i,j}$ und kompakte Mengen $K_{i,j}$ mit $U_{i,j} \supset D_j \supset K_{i,j}$ und

$$\mathcal{L}^n(U_{i,j}) < \mathcal{L}^n(D_j) + 2^{-j}/i, \quad \mathcal{L}^n(K_{i,j}) > \mathcal{L}^n(D_j) - 2^{-j}/i.$$

Dann ist $U_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{i,j}$ offen, $A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j}$ abgeschlossen und es gilt $U_i \supset D \supset A_i$. Mit $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ bzw. $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gelten für beliebiges $i \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen

$$\mathcal{L}^n(E\backslash D) \le \mathcal{L}^n(U_i\backslash D) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(U_{i,j}\backslash D_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} (\mathcal{L}^n(U_{i,j}) - \mathcal{L}^n(D_j)) \le \frac{1}{i},$$

$$\mathcal{L}^n(D\backslash C) \le \mathcal{L}^n(D\backslash A_i) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(D_j\backslash K_{i,j}) \le \sum_{j=1}^{\infty} (\mathcal{L}^n(D_j) - \mathcal{L}^n(K_{i,j})) \le \frac{1}{i}.$$

Dabei wurde die Messbarkeit von D_j und $K_{i,j}$ benutzt. Mit $i \to \infty$ folgen die Behauptungen. □

4.9 Satz. (Lebesguemaß vs. Jordaninhalt)

(i) *Für $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\underline{\mathrm{vol}}^n(E) \le \mathcal{L}^n(E) \le \overline{\mathrm{vol}}^n(E)$*

(ii) *Ist E quadrierbar, so ist E auch $\mathcal{L}^n$-messbar und es gilt $\mathcal{L}^n(E) = \mathrm{vol}^n(E)$.*

Beweis: Nach dem Maßfortsetzungssatz stimmen der Elementarinhalt λ^n und das Lebesguemaß auf Quadern überein, also wegen Satz 1.16 auch auf allen Figuren (vgl. Beweis von Satz 3.19). Für $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^n$ mit $F_1 \subset E \subset F_2$ folgt

$$\lambda^n(F_1) = \mathcal{L}^n(F_1) \le \mathcal{L}^n(E) \le \mathcal{L}^n(F_2) = \lambda^n(F_2).$$

Aussage (i) folgt, indem wir das Supremum über alle $F_1 \subset E$ bzw. das Infimum über alle $F_2 \supset E$ bilden. Ist nun E quadrierbar, so gilt nach Satz 1.26 $\overline{\mathrm{vol}}^n(\partial E) = 0$, also $\mathcal{L}^n(\partial E) = 0$. E ist also Vereinigung der offenen Menge $\mathrm{int}(E)$ und der $\mathcal{L}^n$-Nullmenge $E \cap \partial E$, und damit $\mathcal{L}^n$-messbar. □

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich das Lebesguemaß unter affinlinearen Abbildungen transformiert. Dafür ist der folgende Begriff nützlich.

4.10 Definition (Borelmaß). *Ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt Borelmaß, falls gilt:*

(i) *Alle Borelmengen sind μ-messbar.*

(ii) *$\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$.*

4.11 Beispiel. Das Lebesguemaß $\mathcal{L}^n$ ist ein Borelmaß nach Satz 4.6. Mit Satz 2.17 ist dann auch $\mathcal{L}^n \llcorner E$ ein Borelmaß, für jede Menge $E \subset \mathbb{R}^n$.

Ein Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt translationsinvariant, wenn mit $E + a := \{x + a : x \in E\}$ gilt:

$$\mu(E + a) = \mu(E) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^n,\ E \subset \mathbb{R}^n.$$

Aus der Translationsinvarianz des Elementarinhalts $\lambda^n : \mathcal{P}^n \to [0, \infty)$ und der Definition des Lebesguemaßes folgt sofort, das $\mathcal{L}^n$ ein translationsinvariantes Maß ist. In Satz 4.13 unten wird gezeigt, dass das Borelmaß $\mathcal{L}^n$ durch die Eigenschaft der Translationsinvarianz bis auf Normierung eindeutig charakterisiert ist.

4.12 Lemma. *Ist μ translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, so ist jede Koordinatenhyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = c\}$ eine μ-Nullmenge.*

BEWEIS: Sei $Q = [0,1]^n$ und $F = \{x \in Q : x_i = 0\}$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist $F + a$ abgeschlossen, also μ-messbar. Es folgt für jede endliche Menge $\{s_1, \ldots, s_k\} \subset [0,1]$

$$k\,\mu(F) = \sum_{j=1}^{k} \mu(s_j e_i + F) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} s_j e_i + F\right) \leq \mu(Q) < \infty.$$

Da k beliebig groß gewählt werden kann, ist $\mu(F) = 0$. Aber H ist Vereinigung von abzählbar vielen Translationen von F, und somit $\mu(H) = 0$. □

4.13 Satz (Charakterisierung durch Translationsinvarianz). *Sei μ ein translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt mit $\theta = \mu([0,1]^n)$*

$$\mu(E) = \theta\,\mathcal{L}^n(E) \quad \textit{für alle } \mathcal{L}^n\textit{-messbaren } E \subset \mathbb{R}^n.$$

BEWEIS: Setze $Q_{k,j} = 2^{-k}(j + [0,1]^n)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \mathbb{Z}^n$. Dann ist $[0,1]^n$ Vereinigung der 2^{nk} abgeschlossenen Teilwürfel $\{Q_{k,j} : j \in J_k\}$, wobei $J_k = \{j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq j_i \leq 2^k - 1\}$, mit paarweise disjunktem Inneren. Aus Lemma 4.12 folgt

$$\mu([0,1])^n = \sum_{j \in J_k} \mu(Q_{k,j}), \quad \mathcal{L}^n([0,1]^n) = \sum_{j \in J_k} \mathcal{L}^n(Q_{k,j}).$$

Die Translationsinvarianz impliziert $\mu(Q_{k,j}) = \mu(Q_{k,0})$ und $\mathcal{L}^n(Q_{k,j}) = \mathcal{L}^n(Q_{k,0})$ für alle $j \in \mathbb{Z}^n$, also

$$\theta = \frac{\mu([0,1]^n)}{\mathcal{L}^n([0,1]^n)} = \frac{\mu(Q_{k,0})}{\mathcal{L}^n(Q_{k,0})} = \frac{\mu(Q_{k,j})}{\mathcal{L}^n(Q_{k,j})} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}^n.$$

Daraus folgt mit Lemma 1.25 wobei wieder Lemma 4.12 benutzt wird,

$$\mu(U) = \theta\,\mathcal{L}^n(U) \quad \text{für alle offenen } U \subset \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere gilt die Behauptung des Satzes für alle Quader, und damit für alle $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen aufgrund der Eindeutigkeit der Maßfortsetzung, siehe Satz 3.19. □

Wir zeigen als nächstes die Messbarkeit von Bildmengen, wobei wir uns im Hinblick auf die spätere Anwendung im Transformationssatz für Diffeomorphismen nicht auf lineare Abbildungen beschränken.

4.14 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig mit Konstante Λ bzgl. der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}^n(f(E)) \leq \Lambda^n\,\mathcal{L}^n(E) \quad \textit{für alle } E \subset U.$$