Beweis: Wir können $\mathcal{L}^n(E) < \infty$ annehmen. Setze

$$Q(x_0, \varrho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_\infty < \varrho\} \quad \text{für } x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \varrho > 0.$$

Nach Voraussetzung gilt $\|f(x) - f(x_0)\|_\infty \leq \Lambda \|x - x_0\|_\infty$ für $x, x_0 \in U$, also

$$Q = Q(x_0, \varrho) \subset U \quad \Rightarrow \quad f(Q) \subset Q(f(x_0), \Lambda\varrho).$$

Nach Lemma 4.7 gibt es nun eine offene Menge $V \supset E$ mit $\mathcal{L}^n(V) < \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon$, wobei oBdA $V \subset U$, und weiter eine Ausschöpfung $V = \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$ durch Würfel Q_j mit paarweise disjunktem Inneren, siehe Lemma 1.25. Damit folgt

$$\mathcal{L}^n(f(E)) \leq \mathcal{L}^n(f(V)) \leq \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^n(f(Q_j)) \leq \Lambda^n \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^n(Q_j) \leq \Lambda^n(\mathcal{L}^n(E) + \varepsilon).$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

4.15 Satz ($\mathcal{L}^n$-Messbarkeit von Bildmengen). *Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt:*

(i) *$N \subset U$ Nullmenge $\quad\Rightarrow\quad$ $f(N)$ Nullmenge.*

(ii) *$E \subset U$ $\mathcal{L}^n$-messbar $\quad\Rightarrow\quad$ $f(E)$ $\mathcal{L}^n$-messbar.*

Beweis: Nach Lemma 1.25 kann U schreiben als $U = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$, wobei K_i komapkte Würfel sind. Somit gilt $N = \bigcup_{i=1}^\infty K_i \cap N$ und da f auf kompakten Teilmengen von U Lipschitzstetig ist, folgt Aussage (i) direkt aus Lemma 4.14. Für (ii) können wir annehmen, dass E beschränkt ist, andernfalls betrachten wir $E_n = \{x \in E : |x| \leq n\}$. Nach Satz 4.8 gibt es dann kompakte Mengen A_j und eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge N mit $E = \left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \cup N$. Da $f(A_j)$ kompakt und $\mathcal{L}^n(f(N)) = 0$ nach Behauptung (i), ist $f(E)$ $\mathcal{L}^n$-messbar. □

4.16 Satz (Bewegungsinvarianz von $\mathcal{L}^n$). *Für $S \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\mathcal{L}^n(S(E) + a) = \mathcal{L}^n(E) \text{ für alle } E \subset \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Die Translationsinvarianz von $\mathcal{L}^n$ ist schon bekannt, also können wir $a = 0$ annehmen. Wir setzen zunächst nur $S \in GL_n(\mathbb{R})$ voraus und betrachten mit $T = S^{-1}$ das Bildmaß

$$\mu = T(\mathcal{L}^n) : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty],\ \mu(E) = \mathcal{L}^n(T^{-1}(E)) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^n(S(E)) = \mu(E).$$

Wir behaupten, dass μ ein translationsinvariantes Borelmaß ist. Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ Borelmenge und damit $\mathcal{L}^n$-messbar nach Satz 4.6, so ist $T^{-1}(B) = S(B)$ ebenfalls $\mathcal{L}^n$-messbar wegen Satz 4.15 und damit B μ-messbar nach Satz 2.15. Für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist auch $T^{-1}(K) = S(K)$ kompakt, also $\mu(K) < \infty$. Damit ist gezeigt, dass μ ein Borelmaß ist. Für die Translationsinvarianz berechnen wir für $b \in \mathbb{R}^n$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ beliebig

$$\mu(E+b) = \mathcal{L}^n(S(E+b)) = \mathcal{L}^n(S(E)+S(b)) = \mathcal{L}^n(S(E)) = \mu(E).$$

Aus Satz 4.13 folgt nun $\mu(E) = \theta(S)\,\mathcal{L}^n(E)$ für alle $\mathcal{L}^n$-messbaren $E \subset \mathbb{R}^n$, wobei

$$\theta(S) = \mu([0,1]^n) = \mathcal{L}^n(S([0,1]^n)) \in [0,\infty).$$

Für nicht notwendig messbares $E \subset \mathbb{R}^n$ schließen wir mit Lemma 4.7

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mathcal{L}^n(S(E))\\ &= \inf\{\mathcal{L}^n(V) : V \supset S(E) \text{ offen}\}\\ &= \inf\{\mathcal{L}^n(S(U)) : U \supset E \text{ offen}\}\\ &= \inf\{\mu(U) : U \supset E \text{ offen}\}.\end{aligned}$$

Daraus folgt, wieder mit Lemma 4.7,

$$\mathcal{L}^n(S(E)) = \theta(S)\,\mathcal{L}^n(E) \quad \text{für alle } E \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.17}$$

Ist nun sogar $S \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$, so setzen wir in (4.17) als Testmenge $E = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ ein und erhalten

$$\theta(S)\,\mathcal{L}^n(B_1(0)) = \mathcal{L}^n(S(B_1(0))) = \mathcal{L}^n(B_1(0)).$$

Da $\mathcal{L}^n(B_1(0)) > 0$ folgt $\theta(S) = 1$ für $S \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ und der Satz ist bewiesen. □

Der Elementarinhalt λ^n ist nur für achsenparallele Quader bzw. Figuren definiert worden. Deshalb ist aus der Definition 4.2 von $\mathcal{L}^n$ nicht unmittelbar ersichtlich, dass das Lebesguemaß unabhängig von der Wahl des Euklidischen Koordinatensystems ist, sondern dies folgt erst aus dem vorangegangenen Satz 4.16. Für die Transformationsformel unter beliebigen linearen Abbildungen $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ benötigen wir die folgende Hilfsaussage aus der Linearen Algebra.

4.18 Lemma (Polarzerlegung). *Zu jedem $S \in GL_n(\mathbb{R})$ gibt es eine Diagonalmatrix Λ mit Einträgen $\lambda_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, und $T_1, T_2 \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$, so dass $S = T_1 \Lambda T_2$.*

Beweis: Die Matrix ${}^tSS$ ist symmetrisch und hat positive Eigenwerte, denn für $v \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ gilt $\langle {}^tSSv, v\rangle = |Sv|^2 > 0$. Also gibt es ein $T \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ und eine Diagonalmatrix Λ mit Einträgen $\lambda_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, so dass gilt:

$${}^tSS = T\Lambda^2 T^{-1}.$$

Die Matrix $R = T\Lambda T^{-1}$ ist symmetrisch mit $R^2 = {}^tSS$. Dann ist aber $Q = SR^{-1}$ orthogonal, denn

$${}^tQQ = {}^tR^{-1}\,{}^tSSR^{-1} = R^{-1}R^2R^{-1} = E_n.$$

Es folgt $S = QR = QT\Lambda T^{-1} = T_1\Lambda T_2$ für $T_1 = QT, T_2 = T^{-1} \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ wie verlangt. □

4.19 Satz (Lineare Transformationsformel). *Für eine lineare Abbildung $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt*

$$\mathcal{L}^n(S(E)) = |\det(S)|\,\mathcal{L}^n(E) \quad \textit{für alle } E \subset \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Ist $\det(S) = 0$, so liegt $S(E)$ in einer Hyperebene und die Behauptung ist richtig. Für $\det(S) \neq 0$ haben wir aus dem Beweis von Satz 4.16 bereits die Aussage (4.17) zur Verfügung und müssen dort nur zeigen:

$$\theta(S) = |\det(S)|.$$

Dies stimmt für eine Diagonalmatrix Λ mit positiven Einträgen $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, denn

$$\theta(\Lambda) = \mathcal{L}^n(\Lambda([0,1]^n)) = \mathcal{L}^n([0,\lambda_1] \times \ldots \times [0,\lambda_n]) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = |\det(\Lambda)|.$$

Für S beliebig sei $S = T_1 \Lambda T_2$ mit einer Diagonalmatrix Λ und $T_1, T_2 \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ wie in Lemma 4.18. Aus den schon bekannten Aussagen für orthogonale sowie Diagonalmatrizen folgt

$$\theta(S) = \mathcal{L}^n(T_1 \Lambda T_2([0,1]^n)) = |\det(\Lambda)| = |\det(S)|,$$

und der Satz ist bewiesen. $\square$

4.20 Beispiel (Volumen eines Ellipsoids). Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ ist die Menge

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)^2 < 1\}$$

ein Ellipsoid mit den Halbachsen $\lambda_i > 0$. Mit $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ gilt $E = \Lambda(B_1(0))$, wobei $\Lambda \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen λ_i ist. Aus Satz 4.19 folgt

$$\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(\Lambda(E)) = (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)\; \mathcal{L}^n(B_1(0)).$$

Zum Ende des Kapitels geben wir ein Standardbeispiel für die Existenz von nicht messbaren Mengen an.

4.21 Beispiel (Vitali 1905). Es gibt eine Menge $S \subset [0,1]$, die nicht $\mathcal{L}^1$-messbar ist. Betrachte dazu auf $[0,1]$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Mit dem Auswahlaxiom der Mengenlehre erhalten wir ein Repräsentantensystem $S \subset [0,1]$ für die Relation $\sim$, d. h. zu jedem $y \in [0,1]$ gibt es genau ein $x \in S$ mit $x \sim y$. Sei nun $q_1, q_2, \ldots$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Dann gilt

$$(q_j + S) \cap (q_k + S) = \emptyset \quad \text{für } j \neq k.$$

Denn andernfalls gibt es $x_1, x_2 \in S$ mit $q_j + x_1 = q_k + x_2$, also $x_2 - x_1 = q_j - q_k \in \mathbb{Q}$. Nach Definition von S folgt dann $x_1 = x_2$, also $q_j = q_k$ im Widerspruch zur Annahme. Zweitens behaupten wir

$$[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (q_k + S) \subset [-1,2].$$

Die rechte Inklusion ist trivial. Die linke Inklusion folgt aus der Definition von S, denn zu $y \in [0,1]$ gibt es ein $x \in S$ mit $y - x =: q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$.

Nun ist $\mathcal{L}^1(q+S) = \mathcal{L}^1(S)$ wegen der Translationsinvarianz von $\mathcal{L}^1$. Wäre S und damit jede der Mengen $q_k + S$ $\mathcal{L}^1$-meßbar, so folgt aus den obigen beiden Aussagen und der σ-Additivität, siehe Satz 2.19,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(q_k + S) = \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (q_k + S)\right) \in [1,3].$$

Das ist aber unmöglich, da links die Zahl $\mathcal{L}^1(S) \in [0,\infty)$ unendlich oft addiert wird.

5 Das Lebesgueintegral

Ziel dieses Kapitels ist die Definition des Lebesgueintegrals bezüglich eines Maßes μ auf einer Menge X. Zunächst wird dazu der Begriff der μ-messbaren Funktion eingeführt, wobei aus praktischen Gründen auch die Funktionswerte $\pm\infty$ zugelassen sind. Die Messbarkeit stellt eine sehr schwache Regularitätsbedingung dar. Wesentlich ist, dass der Grenzwert einer (nur) punktweise konvergenten Folge von μ-messbaren Funktionen abermals μ-messbar ist.

Das Integral einer nichtnegativen Funktion kann schon dann definiert werden, wenn die Funktion messbar ist. Hierzu wird die Funktion von unten durch nichtnegative Treppenfunktionen approximiert; für diese ist das Integral elementar erklärt. Das Integral einer beliebigen, μ-messbaren Funktion f ergibt sich dann durch Zerlegung $f = f^+ - f^-$ in den Positiv- und Negativanteil und Subtraktion der Integrale, falls eines von diesen endlich ist.

Die erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wurde zu Beginn von Kapitel 2 eingeführt. Dort wurden die Ordnungsrelation, der Konvergenzbegriff und die Addition in $\overline{\mathbb{R}}$ erklärt. Für die Multiplikation und Division wird zusätzlich zu den Regeln in $\mathbb{R}$ folgendes vereinbart:

$$s \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot s = \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } s \in (0, \infty] \\ 0 & \text{falls } s = 0 \\ \mp\infty & \text{falls } s \in [-\infty, 0), \end{cases}$$

$$\frac{1}{t} = 0 \quad \text{für } t = \pm\infty.$$

Die Multiplikation $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist damit unstetig in den vier Punkten $\{(0, \pm\infty), (\pm\infty, 0)\}$, aber die Vereinbarung $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ erweist sich bei der Definition des Integrals als praktisch. Nicht definiert ist nach wie vor die Division durch Null.

Im folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Alternativ kann man ein äußeres Maß $\mu\colon 2^X \to [0, \infty]$ auf X betrachten. betrachten. Dann ist in den folgenden Behauptungen $\mathcal{A}$ durch die σ-Algebra $\mathcal{M}$ der μ-messbaren Mengen zu ersetzen.

Man beachte, dass Satz 2.19 für Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ gilt. In der Tat ist Behauptung (i), die σ-Additivität von μ bereits in der Definitionm eines Maßes enthalten und die Behauptungen (ii) und (iii) werden auf (i) zurückgeführt.

5.1 Definition (messbare Funktion). *Sei $D \in \mathcal{A}$ eine messbare Menge. Eine Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt μ-messbar auf D, falls für alle $s \in \mathbb{R}$ die Menge*

$$\{x \in D : f(x) \in (s, \infty]\} =: \{f > s\}$$

in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ liegt.

Wir bezeichnen f auch kurz als messbar, wenn über das zugrundeliegende Maß μ und $D \in \mathcal{A}$ kein Zweifel besteht. Mit Definition 5.1 ist natürlich auch die Messbarkeit einer Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ erklärt. Das nächste Lemma ist nützlich, um die Messbarkeit von Funktionen nachzuweisen.

5.2 Lemma (Messbarkeitskriterium für Funktionen). *Sei $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ und die Mengen $f^{-1}\{\infty\}$, $f^{-1}\{-\infty\}$ liegen in $\mathcal{A}$.*

(ii) *f ist μ-messbar, d.h. $\{f > s\} \in \mathcal{A}$ für alle $s \in \mathbb{R}$.*

(iii) *$\{f \leq s\} := \{x \in D : f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A}$ für alle $s \in \mathbb{R}$.*

(iv) *$\{f < s\} := \{x \in D : f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A}$ für alle $s \in \mathbb{R}$.*

(v) *$\{f \geq s\} := \{x \in D : f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A}$ für alle $s \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Aus (i) folgt (ii) wegen $\{f > s\} = f^{-1}(s, \infty) \cup f^{-1}\{\infty\}$. Aus den folgenden Gleichungen ergibt sich, dass (ii) bis (v) untereinander äquivalent sind:

$$\{f \leq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < s + \frac{1}{k}\}, \ \{f > s\} = X \setminus \{f \leq s\},$$
$$\{f \geq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > s - \frac{1}{k}\}, \ \{f < s\} = D \setminus \{f \geq s\}.$$

Es gelte nun eine und damit jede der Aussagen (ii) bis (v). Für ein kompaktes Intervall $[a, b]$ ist dann $f^{-1}([a, b]) = \{f \geq a\} \cap \{f \leq b\} \in \mathcal{A}$. Da sich nach Lemma 1.25 jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ von kompakten Intervallen darstellen lässt, ist $f^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(I_k) \in \mathcal{A}$. Ferner haben wir

$$f^{-1}\{\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > k\} \quad \text{und} \quad f^{-1}\{-\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < -k\}.$$

Also erfüllt f (i). $\square$

5.3 Lemma. *Seien f, g auf D definierte messbare Funktionen. Dann sind die Mengen $\{f < g\} := \{x \in D : f(x) < g(x)\}$ und $\{f \leq g\} := \{x \in D : f(x) \leq g(x)\}$ Elemente aus $\mathcal{A}$.*

Beweis: Die Behauptungen folgen aus $\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{g > q\})$ und $\{f \leq g\} = D \setminus \{f > g\}$. □

5.4 Lemma. *Für eine μ-messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist das Mengensystem*

$$\mathcal{E} = \{E \subset \mathbb{R} : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra. Insbesondere ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$.

Beweis: Nach Lemma 5.2 ist $\mathbb{R} \in \mathcal{E}$, und weiter gilt

$$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus E) = f^{-1}(\mathbb{R}) \setminus f^{-1}(E) \in \mathcal{A} \quad \text{für } E \in \mathcal{E},$$
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i) \in \mathcal{A} \quad \text{für } E_i \in \mathcal{E}.$$

Da $\mathcal{E}$ das System der offenen Mengen enthält, liegt auch die Borelalgebra $\mathcal{B}^1$ in $\mathcal{E}$. □

Der folgende Satz liefert eine verblüffende Beziehung zwischen Lebesgue-messbaren und stetigen Funktionen.

5.5 Satz (Lusin). *Sei $\mathcal{L}^n$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-messbar und sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K = K(\varepsilon) \subseteq A$ so, dass*

(i) $\mathcal{L}^n(A \setminus K) < \varepsilon$;

(ii) $f|_K$ *ist stetig.*

Beweis: Für alle $i \in \mathbb{N}$ setzen wir $B_{ij} := (\frac{j}{i}, \frac{(j+1)}{i}]$, $j \in \mathbb{N}$. Dann sind B_{ij} paarweise disjunkte Intervalle mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij} = \mathbb{R}$ und $\operatorname{diam}(B_{ij}) < \frac{1}{i}$. Die Mengen $A_{ij} := A \cap f^{-1}(B_{ij})$ liegen in $\mathcal{A}$ und es gilt $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$. Nach Lemma 4.7 existieren kompakte Mengen $K_{ij} \subseteq A_{ij}$ mit $\mathcal{L}^n(A_{ij} \setminus K_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}$. Somit gilt:

$$\mathcal{L}^n\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\right) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\right)$$
$$\leq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_{ij} \setminus K_{ij})\right) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Satz 2.19 (ii) liefert $\lim\limits_{N \to \infty} \mathcal{L}^n\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{N} K_{ij}\right) = \mathcal{L}^n\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\right)$ und somit existiert eine Zahl $N(i)$ mit

$$\mathcal{L}^n\Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}\Big) < \frac{\varepsilon}{2^i}\,.$$

Die Menge $D_i := \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}$ ist kompakt. Für alle i, j wählen wir ein $b_{ij} \in B_{ij}$ und definieren $g_i : D_i \to \mathbb{R}$ durch $g_i(x) = b_{ij}$ für $x \in K_{ij}$ $(j \leq N(i))$. Da $K_{i1}, \ldots, K_{iN(i)}$ kompakte disjunkte Mengen sind haben sie einen positiven Abstand voneinander. Also ist g_i stetig. Aufgrund der Konstruktion haben wir

$$|f(x) - g_i(x)| \leq \frac{1}{i} \qquad \forall x \in D_i\,. \tag{5.6}$$

Wir setzen $K := \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i$. Diese Menge ist kompakt und es gilt

$$\mathcal{L}^n(A \setminus K) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \setminus D_i) < \varepsilon\,.$$

Aus (5.6) und der Definition von K folgt, dass g_i gleichmäßig gegen f auf K konvergiert. Also ist $f|_K$ stetig. □

Der Satz von Lusin gilt für viel allgemeinere Maße. Es genügt z.B. ein Borelreguläres Borelmaß μ auf $\mathbb{R}^n$, d.h. für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine Borelmenge $B \supset A$ mit $\mu(A) = \mu(B)$, zu betrachten. Für solche Maße μ kann man zeigen, dass Lemma 4.7 auch gilt.

Beim Umgang mit messbaren Funktionen kommt es sehr oft vor, dass eine Aussage nur für Punkte außerhalb einer Nullmenge gebraucht wird oder gezeigt werden kann. Sei $M \in \mathcal{A}$ und $A[x]$ eine Aussage für Punkte $x \in M$. Man sagt, $A[x]$ gilt für μ-fast-alle $x \in M$ oder μ-fast-überall auf M, falls

$$N := \{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\} \in \mathcal{A}$$

eine μ-Nullmenge ist, d.h. $\mu(N) = 0$. Im Folgenden werden wir auch für einen vollständigen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ als μ-Nullmenge bezeichnen. Ein wichtiges Beispiel ist die Konvergenz fast überall: eine Folge von Funktionen $f_k : D \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise μ-fast-überall gegen $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, wenn gilt:

$$\mu(D \backslash E) = 0 \quad \text{ mit } E = \{x \in D : \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\} \in \mathcal{A}.$$

5.7 Lemma. *Sei $D \in \mathcal{A}$ und sei die Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar. Dann ist auch die Funktion $\widetilde{f} : D \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\widetilde{f} = f$ μ-fast-überall μ-messbar.*

Beweis: Setze $N = \{x \in D : \widetilde{f}(x) \neq f(x)\}$ und $E = D \backslash N$. Dann ist $N \in \mathcal{A}$ eine μ-Nullmenge, und somit liegen die Mengen N, E in $\mathcal{A}$. Es folgt

$$\{\widetilde{f} < s\} = \big(\{\widetilde{f} < s\} \cap E\big) \cup \big(\{\widetilde{f} < s\} \cap N\big) = \big(\{f < s\} \cap E\big) \cup \big(\{\widetilde{f} < s\} \cap N\big).$$

Da μ ein vollständiges Maß ist, erhalten wir $\{\widetilde{f} < s\} \in \mathcal{A}$ und somit f μ-messbar. $\square$

In folgendem Satz sind die Grenzfunktionen punktweise definiert, zum Beispiel ist

$$\liminf_{k\to\infty} f_k : X \to \overline{\mathbb{R}},\ (\liminf_{k\to\infty} f_k)(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x).$$

Punktweise Konvergenz ist eine sehr schwache Form der Konvergenz, unter der sich Eigenschaften wie Stetigkeit oder Integrierbarkeit nicht notwendig auf den Grenzwert übertragen.

5.8 Satz (Grenzwerte messbarer Funktionen). *Sei $f_k : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen μ-messbar:*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \liminf_{k\to\infty} f_k,\ \limsup_{k\to\infty} f_k.$$

Gilt insbesondere $f_k \to f$ punktweise μ-fast-überall, so ist f μ-messbar.

Beweis: Für $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\inf_k f_k \geq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \geq s\}, \quad \{\sup_k f_k \leq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \leq s\}.$$

Nach Lemma 5.2 sind die Funktionen $\inf_k f_k$ und $\sup_k f_k$ also messbar, und damit auch die Funktionen

$$\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} (\inf_{l\geq k} f_l), \quad \limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} (\sup_{l\geq k} f_l).$$

Zum Beweis der letzten Aussage setze $E = \{x \in D : \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\}$ und betrachte

$$\widetilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{falls } x \in E \\ 0 & \text{falls } x \in D \setminus E \end{cases} \quad \text{sowie} \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in E \\ 0 & \text{falls } x \in D \setminus E. \end{cases}$$

Es gilt $\widetilde{f} = \lim_{k\to\infty} \widetilde{f}_k$. Aber nach Voraussetzung ist $D\backslash E$ eine μ-Nullmenge, also folgt die Messbarkeit von f aus Lemma 5.7. $\square$

Der Positiv- bzw. Negativanteil von $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind die Funktionen

$$f^+ = \max(f, 0) \geq 0 \quad \text{und} \quad f^- = \max(-f, 0) = -\min(f, 0) \geq 0. \tag{5.9}$$

5.10 Satz (Messbarkeit und Rechenoperationen). *Seien $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar. Dann sind auch folgende Funktionen messbar, falls sie definiert sind:*

$$f + g,\ \alpha f \text{ für } \alpha \in \mathbb{R},\ f^{\pm},\ \max(f, g),\ \min(f, g), |f|,\ fg,\ f/g.$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass f, g nur Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. Es gilt

$$\{f+g<t\} = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q},\, r+s<t} \{f<r\}\cap\{g<s\}, \quad \{-f<t\} = \{f>-t\}.$$

Also sind $f+g$ und $-f$ messbar, ebenso αf für $\alpha \in \mathbb{R}$. Für jedes $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$ ist die Verkettung $\varphi \circ f$ messbar, denn für $U \subset \mathbb{R}$ offen ist $\varphi^{-1}(U)$ offen und folglich $(\varphi\circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\varphi^{-1}(U)) \in \mathcal{A}$. Damit ergibt sich die Messbarkeit der Funktionen $f^{\pm}$, indem wir $\varphi(s) = \max(\pm s, 0)$ wählen. Weiter sind dann die Funktionen

$$|f| = f^+ + f^-, \ \max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \ \text{ und } \ \min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

messbar. Nun ist $f^2 = \varphi \circ f$ mit $\varphi(s) = s^2$, also folgt die Messbarkeit von f^2 und von

$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big).$$

Schließlich ist auch $1/g$ messbar, denn

$$\{1/g < s\} = \begin{cases} \{1/s < g < 0\} & s < 0 \\ \{g < 0\} & s = 0 \\ \{g<0\}\cup\{g > 1/s\} & s > 0. \end{cases}$$

Nimmt nun f (bzw. g) den Wert ∞ oder $-\infty$ an, so betrachte die abgeschnittene Funktion

$$f_k(x) = \begin{cases} k & f(x) \geq k \\ -k & f(x) \leq -k \\ f(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktionen f_k, g_k sind messbar. Man prüft nach, dass die Funktionen

$$f_k + g_k,\ \alpha f_k,\ f_k^{\pm},\ \max(f_k, g_k),\ \min(f_k, g_k), |f_k|,\ f_k g_k,\ f_k/g_k$$

punktweise gegen die entsprechenden Funktionen für f und g konvergieren, auch im Fall des (unstetigen) Produkts. Also folgt die allgemeine Behauptung aus Satz 5.8. $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass μ-fast-überall Konvergenz einer Folge bis auf kleine Mengen bereits gleichmäßige Konvergenz impliziert.

5.11 Satz (Egorov). *Sei $A \in \mathcal{A}$ eine Menge mit $\mu(A) < \infty$ und seien $f_n : A \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen mit $f_n \to g$ fast überall. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Menge $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$ mit*

(i) $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$,

(ii) $f_k \rightrightarrows g$ *gleichmäßig auf* B.

Beweis: Sei $C_{i,j} := \bigcup_{k=j}^{\infty}\{x \in A : |f_k(x) - g(x)| > 2^{-i}\}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Dann liegen aufgrund von Satz 5.10 die Mengen $C_{i,j}$ in $\mathcal{A}$ und es gilt $C_{i,j+1} \subseteq C_{i,j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Da $\mu(A) < \infty$ haben wir mit Satz 2.19 (iii)

$$\lim_{j\to\infty} \mu(C_{i,j}) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i,j}\right) = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Also gibt es ein $N(i)$ mit $\mu(C_{i,N(i)}) < \varepsilon 2^{-i}$. Wir setzen $B = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,N(i)}$ und erhalten

$$\mu(A \setminus B) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_{i,N(i)}) < \varepsilon\,.$$

Für alle i, alle $x \in B$ und alle $n > N(i)$ gilt

$$|f_n(x) - g(x)| \le 2^{-i}\,,$$

d.h. $f_n \rightrightarrows g$ auf B. □

Für $E \subset X$ heißt die Funktion $\chi_E : X \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion von E (alternativ: charakteristische Funktion). Linearkombinationen solcher Funktionen sind der Grundbaustein des Lebesgueintegrales.

5.12 Definition (Treppenfunktion). *Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion (bzw. genauer μ-Treppenfunktion), wenn sie als eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen von Mengen aus $\mathcal{A}$ darstellbar ist, d.h. es gibt $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \in \mathcal{A}$ mit*

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}\,.$$

Die Menge der μ-Treppenfunktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(\mu)$ und setzen

$$\mathcal{T}^+(\mu) = \{\varphi \in \mathcal{T}(\mu) : \varphi \ge 0 \ \mu\text{-fast-überall}\}.$$

Treppenfunktionen nehmen also nur endlich viele Werte an. Nach Satz 5.10 ist $\mathcal{T}(\mu)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Der folgende Approximationssatz wird benötigt, um Aussagen für Treppenfunktionen auf beliebige messbare Funktionen zu übertragen.

5.13 Satz (Approximation durch Treppenfunktionen). *Sei $f\colon D \to [0, \infty]$ eine nichtnegative μ-messbare Funktion. Dann existiert eine monoton steigende Folge $\{f_n\}$ nichtnegativer Treppenfunktionen mit $f_n \nearrow f$ in D.*