Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$ und $k = 1, 2, \ldots, m2^m$ setzen wir

$$F_{m,k} = \{x \in D; \frac{k-1}{2^m} \le f(x) < \frac{k}{2^m}\}$$

und definieren

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^m}, & \text{falls } x \in F_{m,k}\,, \\ m, & \text{falls } x \in X \setminus \bigcup_k F_{m,k}\,. \end{cases}$$

Offensichtlich sind f_m Treppenfunktionen für die gilt: $f_m(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in D$. □

Das Integral der Indikatorfunktion eines beliebigen Intervalls ist gleich seiner Länge. Demzufolge ist es natürlich für das Lebesgue Integral

$$\int \chi_A \, d\mu = \mu(A), \qquad A \in \mathcal{A}\,,$$

zu fordern. Darüber hinaus sollten Linearität und Monotonie des Integrals gelten und das System der integrierbaren Funktionen so groß wie möglich sein. Treppenfunktionen haben eine Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j}$$

mit $\beta_j \in \mathbb{R}$, $B_j \in \mathcal{A}$, wobei B_j paarweise disjunkt sind. Allerdings ist diese Darstellung nicht eindeutig.

5.14 Lemma. *Seien $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ und $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkte Mengen und seien α_i, β_j nichtnegative reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i} \le \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) \le \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j)\,.$$

Beweis: Wir setzen $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $A_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i$, $B_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^n B_j$. Für $i \in \{0, \ldots, m\}$, $j \in \{0, \ldots, n\}$ gilt entweder $A_i \cap B_j = \emptyset$ oder $\alpha_i \le \beta_j$ und somit

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) &\le \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &\le \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu(B_j)\,. \end{aligned}$$

□

5.15 Definition. *Sei $D \in \mathcal{A}$ und s eine nichtnegative Treppenfunktion mit einer Darstellung $s = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j}$, wobei B_j paarweise disjunkt sind und $\beta_j \geq 0$. Wir setzen*

$$\int_D s \, d\mu := \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(D \cap B_j) .$$

Lemma 5.14 zeigt, dass die Definition des Integrals einer Treppenfunktion unabhängig von ihrer Darstellung ist.

5.16 Definition. *Sei $f \geq 0$ eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte messbare Funktion. Wir definieren das Lebesgueintegral*

$$\int_D f \, d\mu := \sup \left\{ \int_D s \, d\mu ; \ 0 \leq s \leq f \ \textit{auf } D, s \ \textit{Treppenfunktion} \right\} .$$

Nach Satz 5.13 existiert für jede nichtnegative messbare Funktion f eine Folge von Treppenfunktionen $s_n \geq 0$ mit $s_n \nearrow f$. Dies zusammen mit Satz 5.20 ist die Idee hinter unserer Definition des Lebesgueintegrals.
Lemma 5.14 zeigt wiederum, dass die Definitionen 5.15 und 5.16 im Falle einer Treppenfunktion f übereinstimmen.

5.17 Definition. *Sei f eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte messbare Funktion. Wir setzen*

$$\int_D f \, d\mu := \int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu ,$$

falls wenigstens eins der Integrale auf der rechten Seite endlich ist.

Sei f eine auf X definierte Funktion und sei $M \in \mathcal{A}$. Dann gilt offensichtlich

$$\int_M f \, d\mu = \int_X f \chi_M \, d\mu ,$$

$$\int_M f \, d\mu = \int_X f \, d\nu ,$$

wobei $\nu = \mu \llcorner M$ die Restriktion von μ auf die σ-Algebra $\mathcal{A}_M = \{A \in \mathcal{A}, A \subseteq M\}$ ist. Also ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit wenn wir im weiteren nur Integrale über ganz X betrachten.
Falls f nur fast überall auf X definiert ist, d.h. es existiert ein $D \in \mathcal{A}$, so dass f auf D definiert ist und $\mu(X \setminus D) = 0$, dann setzen wir

$$\int_X f \, d\mu := \int_D f \, d\mu ,$$

falls das Integral auf der rechten Seite definiert ist.

5.18 Definition. *Die Menge aller messbaren fast überall auf X definierten Funktionen f, deren Integral definiert ist wird mit $\mathcal{L}^*(\mu)$ oder $\mathcal{L}^*$ bezeichnet. Weiter bezeichnen wir*

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu); \quad \int_X f\, d\mu \ \in \mathbb{R} \right\},$$

und sagen, dass Elemente $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ integrierbare Funktionen sind.

Die Existenz und der Wert des Integrals bleiben unberührt, wenn eine Funktion auf einer Nullmenge abgeändert wird.

5.19 Lemma. *Sei $g \in \mathcal{L}^*$ und f eine messbare Funktion mit $f = g$ fast überall. Dann gilt:*

$$f \in \mathcal{L}^*(\mu) \ \textit{und} \int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu\,.$$

Beweis: Sei $D \in \mathcal{A}$ mit $f = g$ auf $D, \mu(X \setminus D) = 0$. Dann gilt:

$$\int_X f\, d\mu = \int_D f\, d\mu = \int_D g\, d\mu$$

ist definiert. □

Das Herzstück der Lebesgueschen Integraltheorie ist der folgende Spezialfall des Satzes über monotone Konvergenz. Mit seiner Hilfe können wir beweisen, dass das Lebesgueintegral monoton und linear ist.

5.20 Satz. *Seien $f_n \geq 0$ messbare Funktionen auf X mit $f_n \nearrow f$, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu\,.$$

Beweis: Die Funktion f ist als Grenzwert messbarer Funktionen wiederum messbar und nichtnegativ. Also sind alle Integrale definiert. Aus $f_n \leq f_{n+1}$ und der Definition 5.16 folgt, dass $\{\int_X f_n\, d\mu\}$ eine nichtfallende Folge reeller Zahlen ist, deren Grenzwert wir mit α bezeichnen, d.h. $\alpha = \lim \int_X f_n\, d\mu$. Da $f_n \leq f$ gilt erhalten wir $\alpha \leq \int_X f\, d\mu$. Falls $\alpha = \infty$ ist die Behauptung des Satzes klar. Sei nun $\alpha < \infty$ und sei s eine Treppenfunktion mit $0 \leq s \leq f$. Wir werden in mehreren Schritten zeigen, dass $\int_X s\, d\mu \leq \alpha$ ist, was sofort die Behauptung liefert.

(a) Sei $\tau \in (0,1)$ und sei $E_n := \{x \in X : f_n(x) \geq \tau\, s(x)\}$. Dann ist $E_n \in \mathcal{A}$, $E_n \subseteq E_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = X$. In der Tat, falls $f(x) = 0$ dann ist $x \in E_1$; falls $f(x) > 0$, dann ist $\tau s(x) < \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ und somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in E_n$. Satz 2.19 (ii) liefert für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n \cap A) = \mu(A)\,.$$

(b) Sei $s = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{B_j}$, wobei $B_j \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt sind. Dann haben wir

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} \tau s \, d\mu = \tau \int_{E_n} \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{B_j} \, d\mu$$
$$= \tau \sum_{j=1}^{k} \beta_j \mu(B_j \cap E_n) \, .$$

(c) Wenn wir in dieser Ungleichung zur Grenze $n \to \infty$ übergehen erhalten wir unter Benutzung von (a)

$$\alpha \geq \tau \sum_{j=1}^{k} \beta_j \mu(B_j) = \tau \int_X s \, d\mu \, .$$

Da $\tau \in (0,1)$ beliebig war erhalten wir $\alpha \geq \int_X s \, d\mu$. □

5.21 Lemma. *Seien f_1, f_2 nichtnegative messbare Funktionen. Dann gilt:*

$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu \, .$$

BEWEIS: Seien zunächst f_1, f_2 Treppenfunktionen. Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $A_0, \ldots, A_m$, $B_0, \ldots, B_n$ und nichtnegative reelle Zahlen α_i, β_j mit $\bigcup_{i=0}^m A_i = \bigcup_{j=0}^n B_j = X$ und $f_1 = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}, f_2 = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \chi_{B_j}$. Es gilt:

$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j)$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu(B_j)$$
$$= \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu \, .$$

Im allgemeinen Falle finden wir Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen $\{s_n^1\}, \{s_n^2\}$ mit $s_n^1 \nearrow f_1, \quad s_n^2 \nearrow f_2$ und benutzen den gerade bewiesenen Spezialfall sowie Satz 5.20. □

Die folgende Abschätzung, die sogenannte *Tschebyscheff-Ungleichung*, wird sehr oft benutzt.

5.22 Lemma. *Ist* $f : X \to [0,\infty]$ *und* $\int f\,d\mu < \infty$, *so gilt*

$$\mu(\{f \geq s\}) \leq \begin{cases} \dfrac{1}{s} \displaystyle\int f\,d\mu & \text{für } s \in (0,\infty), \\ 0 & \text{für } s = \infty. \end{cases}$$

Beweis: Im Fall $s \in (0,\infty)$ ist die Funktion $s\chi_{\{f\geq s\}}$ eine Treppenfunktion mit $0 \leq s\chi_{\{f\geq s\}} \leq f$, also folgt

$$s\,\mu(\{f \geq s\}) = I(s\chi_{\{f\geq s\}}) \leq \int f\,d\mu.$$

Der Fall $s = \infty$ ergibt sich hieraus durch Grenzübergang, vgl. Satz 2.19 (iii). □

5.23 Folgerung. *Sei* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ*-messbar.*

(i) *Ist* $\int f\,d\mu < \infty$ *(bzw.* $\int f\,d\mu > -\infty$*), so folgt* $f(x) < \infty$ *(bzw.* $f(x) > -\infty$*) für* μ*-fast-alle* $x \in X$.

(ii) *Ist* $f \geq 0$ *und* $\int f\,d\mu = 0$, *so gilt* $f(x) = 0$ *für* μ*-fast-alle* $x \in X$.

Beweis: Aussage (i) folgt mit $s = \infty$ aus Lemma 5.22, angewandt auf f^+ bzw. f^-. In (ii) schließen wir $\mu(\{f \geq s\}) = 0$ für $s > 0$ aus Lemma 5.22, also $\mu(\{f > 0\}) = 0$ mit Satz 2.19 (ii). □

5.24 Satz. *Es gelten:*

(a) *Für* $f, g \in \mathcal{L}^1$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ist* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1$ *und*

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu + \beta \int_X g\,d\mu\,.$$

(b) *Aus* $f \in \mathcal{L}^1$ *folgt* $|f| \in \mathcal{L}^1$ *und die Abschätzung:*

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\;d\mu\,.$$

(c) *Aus* $f, g \in \mathcal{L}^1$ *folgt* $\max(f,g), \min(f,g) \in \mathcal{L}^1$.

(d) *Sei* f *messbar,* $g \in \mathcal{L}^1$ *und gelte* $|f| \leq g$, *dann ist auch* $f \in \mathcal{L}^1$ *und*

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu\,.$$

Beweis:

(a) Wir zeigen zuerst dass $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$ für alle $f \in \mathcal{L}^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Für $\alpha = 0$ ist dies trivial. Sei nun $\alpha > 0$ und $f \geq 0$ eine beliebige Treppenfunktion mit $0 \leq \varphi \leq f$, so gilt $0 \leq \alpha\varphi \leq \alpha f$ und es folgt aus der Definition des Integrals 5.16

$$\alpha \int \varphi d\mu = \int (\alpha\varphi) d\mu \leq \int (\alpha f) \, d\mu \quad \Rightarrow \quad \alpha \int f \, d\mu \leq \int (\alpha f) \, d\mu.$$

Anwendung auf $1/\alpha$ und αf (statt α und f) ergibt die gewünschte Gleichheit. Für $\alpha > 0$ und $f \in \mathcal{L}^1$ gilt $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ und $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int (\alpha f) \, d\mu &= \int (\alpha f)^+ \, d\mu - \int (\alpha f)^- \, d\mu \\ &= \alpha \int f^+ \, d\mu - \alpha \int f^- \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu. \end{aligned}$$

Schließlich folgt aus $(-f)^+ = f^-$ und $(-f)^- = f^+$ die Gleichung

$$\int (-f) \, d\mu = \int f^- \, d\mu - \int f^+ \, d\mu = -\left(\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right) = -\int f \, d\mu.$$

Damit ist $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$ gezeigt.
Für $f, g \in \mathcal{L}^1$ schreiben wir $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ und $h = f + g$ (aufgrund von Folgerung 5.23 ist h fast überall definiert). Es gilt:

$$h = h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

und Lemma 5.21 liefert, da alle Funktionen messbar sind,

$$\int_X h^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu + \int_X g^+ \, d\mu + \int_X h^- \, d\mu\,.$$

Die Behauptung folgt nun, wenn wir beachten, das $\int_X h^+ \, d\mu$ und $\int_X h^- \, d\mu$ endlich sind. Dies ist aber der Fall, da

$$0 \leq h^+ = (f + g)^+ \leq f^+ + g^+$$

und die rechte Seite eine integrierbare Funktion ist. Analog für h^-.

(b) Für $f \in \mathcal{L}^1$ gilt: $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}^1$ nach (a). Also

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_X f\,d\mu\right| &= \left|\int\limits_X f^+\,d\mu - \int\limits_X f^-\,d\mu\right| \\ &\le \left|\int\limits_X f^+\,d\mu\right| + \left|\int\limits_X f^-\,d\mu\right| \\ &= \int\limits_X f^+\,d\mu + \int\limits_X f^-\,d\mu = \int\limits_X |f|\,d\mu\,.\end{aligned}$$

(c) Die Behauptung folgt sofort aus (a) und (b), wenn man beachtet, dass

$$\max(f,g) = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)\,.$$

Analog für $\min(f,g)$.

(d) Für eine messbare Funktion f ist auch f^+ messbar und es gilt:

$$0 \le \int\limits_X f^+\,d\mu \le \int\limits_X g\,d\mu < \infty\,,$$

da $0 \le f^+ \le |f| \le g$. Also ist $f^+ \in \mathcal{L}^1$ und analog zeigt man $f^- \in \mathcal{L}^1$. Da $f = f^+ - f^-$ gilt, folgt $f \in \mathcal{L}^1$. Aus $f = f^+ - f^- \le f^+ \le |f| \le g$ und der Definition des Integrals folgt sofort

$$\int\limits_X f\,d\mu \le \int\limits_X |f|\,d\mu \le \int\limits_X g\,d\mu\,.$$

□

Aussage (d) des vorherigen Satzes kann wie folgt verschärft werden.

5.25 Folgerung. *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar und $\int f\,d\mu > -\infty$. Dann gilt*

$$f \le g \ \mu\text{-fast-überall} \qquad \Rightarrow \qquad \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu.$$

Insbesondere ist $\int g\,d\mu$ definiert.

Beweis: Im Fall $f, g \ge 0$ folgt die Behauptung direkt aus Definition 5.16. Für f, g beliebig haben wir

$$\big(\{g^- > f^-\} \cup \{f^+ > g^+\}\big) \subset \{f > g\},$$

also $g^- \le f^-$ und $f^+ \le g^+$ μ-fast-überall. Somit gilt

$$\int g^- \, d\mu \leq \int f^- \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int f^+ \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu,$$

und die Behauptung folgt. □

5.26 Beispiel. Betrachte für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^{-\alpha}$. Wir behaupten:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} f \, d\mathcal{L}^n < \infty \Leftrightarrow \alpha > n, \quad \text{und} \quad \int_{B_1(0)} f \, d\mathcal{L}^n < \infty \Leftrightarrow \alpha < n.$$

Zum Beweis vergleichen wir f mit der Funktion

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k\alpha} \chi_{A_k} \quad \text{mit } A_k = \{2^k \leq |x| < 2^{k+1}\}.$$

Es gelten die Abschätzungen

$$2^{-\alpha} g \leq f \leq g \text{ für } \alpha \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad 2^{-\alpha} g \geq f \geq g \text{ für } \alpha \leq 0.$$

Wegen der Monotonie des Integrals reicht es also aus, die Aussagen für g zu zeigen. Da $A_k = 2^k A_0$, folgt aus der Transformation von $\mathcal{L}^n$ unter Streckungen, vgl. Satz 4.19,

$$\mathcal{L}^n(A_k) = (2^k)^n \, \mathcal{L}^n(A_0) = 2^{nk} \gamma_n \quad \text{mit } \gamma_n = \mathcal{L}^n(A_0) \in (0, \infty).$$

Da die Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^{l} 2^{-k\alpha} \chi_{A_k}$ punktweise auf $\mathbb{R}^n$ gegen $g \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)}$ konvergiert, folgt aus dem Satz über monotone Konvergenz

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} g \, d\mathcal{L}^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \int 2^{-k\alpha} \chi_{A_k} \, d\mathcal{L}^n \\ &= \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n-\alpha)k} = \begin{cases} \gamma_n \dfrac{1}{1 - 2^{n-\alpha}} & \text{falls } \alpha > n \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ganz entsprechend erhalten wir auf $B_1(0)$

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} g \, d\mathcal{L}^n &= \sum_{k=-1}^{-\infty} \int 2^{-k\alpha} \chi_{A_k} \, d\mathcal{L}^n \\ &= \gamma_n \sum_{k=-1}^{-\infty} 2^{(n-\alpha)k} = \begin{cases} \gamma_n \dfrac{1}{2^{n-\alpha} - 1} & \text{falls } \alpha < n \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung von Beispiel 5.26 gezeigt.

Mit dem Majorantenkriterium (Satz 5.24 (d)) und Beispiel 5.26 folgt, dass allgemein Funktionen integrierbar sind, deren Wachstum durch eine geeignete Potenz $|x|^{-\alpha}$ kontrolliert ist. Genauer:

5.27 Beispiel. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar bzgl. $\mathcal{L}^n$ und gilt für eine Konstante $C \in [0, \infty)$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\le C\,|x|^{-\alpha} \text{ fast überall in } B_\varrho(0) \text{ mit } \alpha < n, \quad \text{bzw.}\\
|f(x)| &\le C\,|x|^{-\alpha} \text{ fast überall in } \mathbb{R}^n \backslash B_R(0) \text{ mit } \alpha > n,
\end{aligned}
$$

so ist f auf $B_\varrho(0)$ bzw. auf $\mathbb{R}^n \backslash B_R(0)$ integrierbar.

6 Konvergenzsätze und L^p-Räume

Sei $f_k : X \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Welche Voraussetzungen sind an die Qualität der Konvergenz $f_k \to f$ zu stellen, damit der Grenzübergang mit dem Integral vertauscht werden kann, das heißt damit gilt:

$$\int f \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu.$$

Die Konvergenzsätze von B. Levi und H. Lebesgue geben mit der monotonen Konvergenz bzw. der majorisierten Konvergenz hinreichende Bedingungen an, die wesentlich schwächer sind als die beim Regelintegral benötigte gleichmäßige Konvergenz. Der Satz über majorisierte Konvergenz liefert (unter anderem) folgendes zentrale Resultat von Riesz & Fischer: der Raum der integrierbaren Funktionen – modulo Gleichheit fast überall – ist mit der Integralnorm ein Banachraum.

Die punktweise Konvergenz $f_k \to f$ reicht im allgemeinen nicht aus, um das Integral mit dem Grenzwert zu vertauschen.

6.1 Beispiel. Betrachte auf $\mathbb{R}$ die charakteristischen Funktionen $f_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$. Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon(x) = f_0(x) \text{ mit } f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Andererseits haben wir $\int f_\varepsilon \, d\mathcal{L}^1 = \frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{L}^1([-\varepsilon, \varepsilon]) = 1$ für alle $\varepsilon > 0$, das heißt

$$\int f_0 \, d\mathcal{L}^1 = 0 < 1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int f_\varepsilon \, d\mathcal{L}^1.$$

Eine für die Vertauschung hinreichende, zusätzliche Bedingung liefert der Satz über monotone Konvergenz, der bereits im vorigen Kapitel in einem Spezialfall für den Nachweis der Linearität des Integrals benötigt wurde.

6.2 Satz (Levi, monotone Konvergenz). *Sei $\{f_n\}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n \nearrow f$ fast überall und sei $\int_X f_1 \, d\mu > -\infty$. Dann gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \,.$$

Beweis: Der Satz wurde schon im Spezialfall $f_n \geq 0$ und $f_n \nearrow f$ überall bewiesen (Satz 5.20). Der allgemeine Fall kann darauf zurückgeführt werden. Wir ändern f_n, f auf einer Menge vom Maß Null derart, dass $f_n \nearrow f$ überall. Aus $f_n \geq f_1$ und $f_1 \in \mathcal{L}^*$ folgt $f_n \in \mathcal{L}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\int_X f_n \, d\mu = \infty$ für $n \geq n_0$ ist die Behauptung klar. Sei also $f_n \in \mathcal{L}^1$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $g_n \equiv f_n + f_1^- \in \mathcal{L}^1$, da $f_1^- \in \mathcal{L}^1$ nach Voraussetzung. Die Folge g_n besteht aus nichtnegativen integrierbaren Funktionen mit $g_n \nearrow f + f_1^-$. Satz 5.20 liefert also

$$\int_X g_n \, d\mu \longrightarrow \int_X (f + f_1^-) \, d\mu \,.$$

Da $f^- \leq f_1^- \in \mathcal{L}^1$ und $f + f_1^- = f^+ + (f_1^- - f^-)$ liefert Lemma 5.21 und Satz 5.24

$$\begin{aligned}
\int_X (f - f_1^-) \, d\mu &= \int_X f^+ \, d\mu + \int_X (f_1^- - f^-) \, d\mu \\
&= \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu + \int_X f_1^- \, d\mu \\
&= \int_X f \, d\mu + \int_X f_1^- \, d\mu \,.
\end{aligned}$$

Dies zusammen mit

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_X g_n \, d\mu - \int_X f_1^- \, d\mu \to \int_X (f + f_1^-) \, d\mu - \int_X f_1^- \, d\mu$$

liefert die Behauptung. □

Als Anwendung wollen wir kurz Maße besprechen, die durch Integration gegen eine Dichtefunktion gegeben sind.

6.3 Satz (Maß mit Dichtefunktion). *Sei μ äußeres Maß auf X, und $\theta : X \to [0, \infty]$ sei μ-messbar. Dann ist die Funktion*

$$\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty], \; \lambda(E) = \int_E \theta \, d\mu = \int \theta \chi_E \, d\mu$$

ein Prämaß auf der σ-Algebra der μ-messbaren Mengen $\mathcal{M}$, dessen Caratheodory-Fortsetzung mit $\mu \llcorner \theta$ bezeichnet wird. Es gelten folgende Aussagen:

(i) *E μ-messbar $\Rightarrow$ E $\mu \llcorner \theta$-messbar.*

(ii) *$\mu(E) = 0$ $\Rightarrow$ $\mu \llcorner \theta(E) = 0$.*

(iii) *$\int f \, d(\mu \llcorner \theta) = \int f \theta \, d\mu$ für alle μ-messbaren $f : X \to [0, \infty]$.*

Beweis: Ist $E \in \mathcal{M}$ und $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ mit $E_j \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt, so folgt aus dem Satz 6.2 über monotone Konvergenz

$$\lambda(E) = \int \theta \chi_E \, d\mu = \int \sum_{j=1}^{\infty} \theta \chi_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int \theta \chi_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j).$$

Also ist λ ein Prämaß, und die Caratheodory-Fortsetzung $\mu \llcorner \theta$ ist nach Satz 3.4 definiert; insbesondere sind alle μ-messbaren Mengen auch $\mu \llcorner \theta$-messbar. Ist $\mu(E) = 0$, so ist die Funktion $\theta \chi_E$ μ-fast-überall Null, und aus Lemma 5.19 und Satz 5.24 (d) folgt $\mu \llcorner \theta(E) = \int \theta \chi_E \, d\mu = 0$. Nun gilt für $E \subset X$ μ-messbar aufgrund der Definition des Integrals, der Caratheodory-Fortsetzung und von λ

$$\int \chi_E \, d(\mu \llcorner \theta) = \mu \llcorner \theta(E) = \int \chi_E \theta \, d\mu.$$

Damit folgt (iii) für alle Treppenfunktionen $\varphi \in \mathcal{T}^+(\mu)$. Für eine beliebige μ-messbare Funktion $f \geq 0$ wähle eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k \in \mathcal{T}^+(\mu)$ mit $\varphi_k \nearrow f$ nach Satz 5.13, und schließe wieder mit monotoner Konvergenz

$$\int f \, d(\mu \llcorner \theta) = \lim_{k \to \infty} \int \varphi_k \, d(\mu \llcorner \theta) = \lim_{k \to \infty} \int \varphi_k \theta \, d\mu = \int f \theta \, d\mu.$$

□

Ist zusätzlich $\theta : X \to [0, \infty]$ integrierbar bezüglich μ, so lässt sich Aussage (ii) von Satz 6.3 wie folgt verschärfen: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$E \ \mu\text{-messbar}, \ \mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad (\mu \llcorner \theta)(E) < \varepsilon. \tag{6.4}$$

Denn nach Satz 6.2 gibt es ein (hinreichend großes) $k \in \mathbb{N}$, so dass für $\theta_k = \min(\theta, k)$ gilt:

$$\int (\theta - \theta_k) \, d\mu = \int \theta \, d\mu - \int \theta_k \, d\mu < \varepsilon/2.$$

Daraus folgt, falls $\mu(E) < \varepsilon/(2k) =: \delta$,

$$(\mu \llcorner \theta)(E) = \int_E \theta \, d\mu = \int_E (\theta - \theta_k) \, d\mu + \int \theta_k \, d\mu \leq \int (\theta - \theta_k) \, d\mu + k \, \mu(E) < \varepsilon.$$

Das folgende Lemma ist von unabhängigem Interesse, zum Beispiel in der Variationsrechnung. Es besagt unter anderem, dass das Integral bezüglich punktweiser Konvergenz nichtnegativer Funktionen unterhalbstetig ist.

6.5 Lemma (Lemma von Fatou). *Sei $f_k : X \to [0, \infty]$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen. Für $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = \liminf_{k \to \infty} f_k(x)$ gilt dann*

$$\int f \, d\mu \leq \liminf_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu.$$