Beweis: Für die Folge $g_k = \inf_{j\geq k} f_j$ gilt $g_{k+1} \geq g_k$ und $\lim_{k\to\infty} g_k = f$. Mit Satz 6.2 folgt, da andererseits $g_k \leq f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

$$\int f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k\,d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k\,d\mu.$$

□

6.6 Satz (Satz über majorisierte Konvergenz von Lebesgue). *Sei $f_1, f_2, \dots$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen, und $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für μ-fast-alle $x \in X$. Es gebe eine integrierbare Funktion $g : X \to [0,\infty]$ mit $\sup_k |f_k(x)| \leq g(x)$ für μ-fast-alle x. Dann ist f integrierbar bzgl. μ, und es gilt*

$$\int f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k\,d\mu.$$

Es gilt sogar $\|f - f_k\|_{L^1(\mu)} = \int |f - f_k|\,d\mu \to 0$, vgl. Definition 6.11.

Beweis: Die Folge $2g - |f - f_k| \geq 0$ konvergiert punktweise fast überall gegen $2g$. Mit Lemma 6.5 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \Big| \int f\,d\mu - \int f_k\,d\mu \Big| &\leq \limsup_{k\to\infty} \int |f - f_k|\,d\mu \\
&= \int 2g\,d\mu - \liminf_{k\to\infty} \int (2g - |f - f_k|)\,d\mu \\
&\leq \int 2g\,d\mu - \int \liminf_{k\to\infty} (2g - |f - f_k|)\,d\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Als erste Anwendung wollen wir das eindimensionale Integral einer Regelfunktion mit dem Lebesgueintegral bzgl. des Maßes $\mathcal{L}^1$ vergleichen. Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Man beachte, dass Treppenfunktionen im Sinne der Vorlesung Analysis I auch Treppenfunktionen im Sinne von Definition 5.12 sind. Eine Funktion f ist Regelfunktion, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen s_n gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Aus der Ungleichung

$$|s_n(x)| \leq |s_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \varepsilon + c\,,$$

die für alle $x \in I$ und alle $n \geq n_0$ gilt, da f beschränkt ist, erhalten wir mithilfe von Satz 6.6

6.7 Satz. *Jede Regelfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist auch Lebesgue integrierbar und es gilt:*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_I f\,d\mathcal{L}^1\,.$$

Ein uneigentliches Integral kann dann und nur dann als Lebesgueintegral aufgefasst werden, wenn es absolut konvergiert. Dies zeigt man leicht mit Definition 5.18, Satz 6.7 und einem Konvergenzsatz. Zum Beispiel ist das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ nicht als Lebesgueintegral definiert, vergleiche auch Beispiel 6.10.

Wir kommen nun zu einer zweiten Anwendung des Satzes von Lebesgue, nämlich der Frage der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Integralen, deren Integrand von einem Parameter abhängt.

6.8 Lemma (Stetigkeit von Parameterintegralen). *Sei μ ein Maß auf Y, $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x,\cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in U$. Betrachte die Funktion*

$$\varphi : U \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \int f(x,y)\,d\mu(y).$$

Es sei $f(\cdot,y)$ stetig auf U für μ-fast-alle $y \in Y$, und es gebe eine μ-integrierbare Funktion $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\sup_{x\in U} |f(x,y)| \leq g(y) \text{ für } \mu\text{-fast-alle } y \in Y.$$

Dann ist φ stetig auf U.

Beweis: Für eine Folge $x_k \to x \in U$ konvergieren die Funktionen $f_k = f(x_k,\cdot)$ nach Voraussetzung μ-fast-überall gegen $f(x,\cdot)$, und es gilt $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq g(x)$ mit $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Also folgt aus Satz 6.6

$$\varphi(x) = \int f(x,y)\,d\mu(y) = \lim_{k\to\infty} \int f(x_k,y)\,d\mu(y) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k).$$

□

6.9 Satz (Differentiation unter dem Integralzeichen). *Sei μ Maß auf Y, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x,\cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in U$. Es gelte:*

(i) *$f(\cdot,y) \in C^1(U)$ für μ-fast-alle $y \in Y$,*

(ii) *Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\sup_{x\in U} |D_x f(x,y)| \leq g(y)$ für μ-fast-alle $y \in Y$.*

Dann ist die Funktion $\varphi(x) = \int f(x,y)\,d\mu(y)$ auf U stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,d\mu(y) \text{ für alle } x \in U.$$

Beweis: Für $x \in U$ und $h \neq 0$ hinreichend klein gilt

$$\frac{\varphi(x+he_i)-\varphi(x)}{h} = \int \frac{f(x+he_i,y)-f(x,y)}{h}\,d\mu(y).$$

Nun haben wir nach Voraussetzung

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_i,y)-f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) \text{ für } \mu\text{-fast-alle } y \in Y.$$

Ferner gilt die Abschätzung, wieder für μ-fast-alle $y \in Y$,

$$\left|\frac{f(x+he_i,y)-f(x,y)}{h}\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+te_i,y)\,dt\right| \leq g(y).$$

Durch Grenzübergang $h \to 0$ erhalten wir mit Satz 6.6 die Existenz von $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)$ und die Darstellung durch Differentiation unter dem Integralzeichen. Die Stetigkeit der Ableitung ergibt sich dann aus Lemma 6.8. □

6.10 Beispiel. Als Beispiel berechnen wir den Grenzwert

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx := \lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Dazu bilden wir das Parameterintegral $\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$. Der Integrand $f(t,x) = e^{-tx}\frac{\sin x}{x}$ ist integrierbar bzgl. x auf $(0,\infty)$ für alle $t > 0$, ist stetig differenzierbar nach t für alle $x > 0$ und erfüllt für $t \geq \tau > 0$ die Abschätzung

$$\sup_{x\in(0,\infty)} |\partial_t f(t,x)| \leq e^{-\tau x} =: g(x) \text{ mit } g \in L^1((0,\infty)).$$

Da $\tau > 0$ beliebig, folgt für alle $t > 0$ aus Satz 6.9 und anschließender partieller Integration

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt}(t) &= -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx\\
&= \left[e^{-tx}\cos x\right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty (-t)e^{-tx}\cos x\,dx\\
&= -1 + t^2\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx\\
&= -1 - t^2\,\frac{d\varphi}{dt}(t).
\end{aligned}$$

Nun gilt $\lim_{t\nearrow\infty} f(t,x) = 0$ mit integrierbarer Majorante e^{-x}, also folgt aus Satz 6.6

$$\lim_{t\nearrow\infty}\varphi(t) = 0.$$

Weiter gilt $\lim_{t\searrow 0} f(t,x) = \frac{\sin x}{x}$, aber hier gibt es *keine* Majorante, denn $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$. Wir müssen also subtiler argumentieren. Für $t \geq 0$ und $0 < r_1 < r_2 < \infty$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{r_1}^{r_2} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \operatorname{Im} \int_{r_1}^{r_2} e^{(i-t)x} \frac{dx}{x} \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{e^{(i-t)x}}{(i-t)x}\right]_{x=r_1}^{x=r_2} + \operatorname{Im} \int_{r_1}^{r_2} \frac{e^{(i-t)x}}{(i-t)} \frac{dx}{x^2}.\end{aligned}$$

Dies liefert die Abschätzung $\left|\int_{r_1}^{r_2} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| \leq 3/r_1$, und es folgt

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx - \varphi(t)\right| \leq \underbrace{\left|\int_0^{r_1} (1-e^{-tx}) \frac{\sin x}{x}\, dx\right|}_{\to 0 \text{ mit } t\searrow 0} + \frac{6}{r_1}.$$

Also erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{t\searrow 0} \varphi(t) - \lim_{t\nearrow\infty} \varphi(t) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Wir führen nun die L^p-Räume ein und zeigen, dass sie Banachräume sind. Dies ist die wohl wichtigste Konsequenz der Konvergenzsätze.

6.11 Definition (L^p-Raum). *Für μ-messbares $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $1 \leq p \leq \infty$ setzen wir*

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \begin{cases} \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{s > 0 : |f(x)| \leq s \ \mu\text{-fast-überall}\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Auf $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \ \mu\text{-messbar}, \|f\|_{L^p(\mu)} < \infty\}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ für } \mu\text{-fast-alle } x \in X,$$

und definieren den L^p-Raum durch $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$.

Wir schreiben $\|\cdot\|_{L^p}$ statt $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$, wenn sich das Maß aus dem Kontext ergibt. Es ist üblich, die Elemente von $L^p(\mu)$ wieder als Funktionen zu bezeichnen. Etwas allgemeiner kann auch der Begriff der L^p-Funktion auf einer messbaren Teilmenge definiert werden.

6.12 Definition. *Für $E \in \mathcal{A}$ und $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sei $f_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ die Fortsetzung mit $f_0(x) = 0$ für alle $x \in X \backslash E$. Wir setzen dann*

$$\mathcal{L}^p(E) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} : f_0 \in \mathcal{L}^p(X)\},$$

und $L^p(E,\mu) = \mathcal{L}^p(E,\mu)/\sim$ (analog zu Definition 6.11).

6.13 Satz. *Für $1 \le p \le \infty$ ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p(\mu)})$ ein normierter Vektorraum. Insbesondere gelten für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in L^p(\mu)$ folgende Aussagen:*

(1) $\|f\|_{L^p} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$ *μ-fast-überall.*

(2) $f \in L^p(\mu),\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda f \in L^p(\mu)$ *und* $\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda|\,\|f\|_{L^p}$.

(3) $f, g \in L^p(\mu) \quad \Rightarrow \quad f + g \in L^p(\mu)$ *und* $\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$.

Beweis: Sei zunächst $1 \le p < \infty$. Dann ist $\|f\|_{L^p}$ wohldefiniert nach Lemma 5.19, und Folgerung 5.23 impliziert Aussage (1). Weiter folgt Behauptung (2) aus der Linearität des Integrals, siehe Satz 5.24. Da die Funktion $t \mapsto t^p$ auf $[0, \infty)$ konvex ist, gilt nun

$$|f+g|^p = 2^p \left|\frac{f+g}{2}\right|^p \le 2^{p-1}\left(|f|^p + |g|^p\right)$$
$$\Rightarrow \quad \|f+g\|_{L^p} \le 2^{1-1/p}\left(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\right).$$

Insbesondere ist mit $f, g \in L^p(\mu)$ auch $f+g \in L^p(\mu)$. Die Dreiecksungleichung wird unten in Satz 6.16 mithilfe der Hölderschen Ungleichung gezeigt.
Im Fall $p = \infty$ sind die Aussagen (1) und (3) leicht zu sehen. Für (2) nehmen wir ohne Einschränkung $\lambda \neq 0$ an. Es gilt dann

$$\mu(\{x \in X : |\lambda f(x)| > |\lambda|\,\|f\|_{L^\infty}\}) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_{L^\infty}\}) = 0,$$

also $\|\lambda f\|_{L^\infty} \le |\lambda|\,\|f\|_{L^\infty}$. Die Gleichheit in (2) ergibt sich nun durch Anwendung auf λf und $\frac{1}{\lambda}$, statt f bzw. λ. □

6.14 Lemma (Youngsche Ungleichung). *Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \ge 0$ gilt*

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Beweis: Sei $y \ge 0$ fest und $f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy$. Dann gilt

$$f'(x) = x^{p-1} - y \begin{cases} < 0 & \text{für } x < y^{\frac{1}{p-1}} \\ > 0 & \text{für } x > y^{\frac{1}{p-1}} \end{cases}$$

Somit ist $y^{\frac{1}{p-1}}$ das Minimum von f. Also gilt für alle $x \ge 0$

$$f(x) \ge f\big(y^{\frac{1}{p-1}}\big) = \frac{1}{p}\, y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}\, y^{\frac{p}{p-1}} - y^{\frac{p}{p-1}} = 0.$$

□

6.15 Satz (Höldersche Ungleichung). *Für messbare $f, g \ge 0$ gilt*

$$\int fg\,d\mu \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}, \qquad \textit{falls } 1 \le p, q \le \infty \textit{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Beweis: Wir können $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$ annehmen. Aus Lemma 6.14 folgt

$$\int fg\,d\mu \leq \int \left(\frac{1}{p}f^p + \frac{1}{q}g^q\right)\,d\mu = 1 = \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}.$$

Der Fall $p = 1$, $q = \infty$ ergibt sich direkt aus Satz 5.24. □

Die Höldersche Ungleichung hat als Spezialfall für $p = q = 2$ die Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Wir können nun den noch fehlenden Beweis der Dreiecksungleichung in $L^p(\mu)$ nachtragen.

6.16 Satz (Minkowski-Ungleichung). *Für $f, g \in L^p(\mu)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ gilt*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^q}.$$

Beweis: Indem wir im letzten Schritt die Höldersche Ungleichung anwenden, folgt

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p_{L^p(\mu)} &= \int |f+g|^p\,d\mu \\
&\leq \int |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \\
&\leq \|f\|_{L^p}\|f+g\|^{p-1}_{L^p} + \|g\|_{L^p}\|f+g\|^{p-1}_{L^p}.
\end{aligned}$$

Kürzen liefert die Behauptung. □

Das folgende Lemma stellt den wesentlichen Schritt im Beweis der Vollständigkeit von $L^p(\mu)$ dar.

6.17 Lemma. *Sei $1 \leq p < \infty$ und $f_k = \sum_{j=1}^k u_j$ mit $u_j \in L^p(\mu)$. Falls $\sum_{j=1}^\infty \|u_j\|_{L^p} < \infty$, so gelten folgende Aussagen:*

(1) *$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert für μ-fast-alle $x \in X$.*

(2) *$f \in L^p(\mu)$.*

(3) *$\|f - f_k\|_{L^p} \to 0$.*

Beweis: Wir betrachten die Funktionen

$$g_k = \sum_{j=1}^k |u_j|, \quad g = \sum_{j=1}^\infty |u_j|.$$

Es gilt $g_k \leq g_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $g_k(x) \to g(x)$ für alle $x \in X$ mit $k \to \infty$. Aus dem Satz über monotone Konvergenz, Satz 6.2, und der Minkowski-Ungleichung folgt

$$\|g\|_{L^p} = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_{L^p} \leq \sum_{j=1}^\infty \|u_j\|_{L^p} < \infty.$$

Wegen Folgerung 5.23 ist $g(x) < \infty$ für μ-fast-alle x. Für diese x ist $\big(f_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ definiert. Ferner gilt $|f_k|^p \le g^p \in L^1(\mu)$ sowie $|f - f_k|^p \le 2^p\, g^p$. Aus dem Satz über majorisierte Konvergenz, Satz 6.6, folgt $f \in L^p(\mu)$ und $\|f - f_k\|_{L^p} \to 0$. $\square$

6.18 Satz (Riesz & Fischer). $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ *ist vollständig, also ein Banachraum.*

Beweis: Sei $f_k \in L^p(\mu)$ eine gegebene Cauchyfolge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^p}$. Es reicht aus, eine Teilfolge anzugeben, die in $L^p(\mu)$ konvergiert. Wir betrachten zuerst den Fall $1 \le p < \infty$, und können nach evtl. Wahl einer Teilfolge annehmen:

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \le 2^{-k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Mit $f_0 := 0$ gilt $f_k = \sum_{j=1}^k u_j$ für $u_j = f_j - f_{j-1}$. Die Voraussetzungen von Lemma 6.17 sind erfüllt, also konvergiert f_k in $L^p(\mu)$ sowie punktweise μ-fast-überall gegen eine Funktion $f \in L^p(\mu)$. Dies beweist den Satz für $1 \le p < \infty$. Sei nun $p = \infty$. Wegen $|\,\|f_k\|_{L^\infty} - \|f_l\|_{L^\infty}| \le \|f_k - f_l\|_{L^\infty}$ existiert $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^\infty}$. Die folgenden Mengen haben μ-Maß Null:

$$N_k = \{x : |f_k(x)| > \|f_k\|_{L^\infty}\} \text{ sowie } N_{k,l} = \{x : |f_k(x) - f_l(x)| > \|f_k - f_l\|_{L^\infty}\}.$$

Also ist $N = \bigcup_{k=1}^\infty N_k \cup \bigcup_{k,l=1}^\infty N_{k,l}$ ebenfalls eine Nullmenge. Für $x \in X\backslash N$ gilt nun

$$|f_k(x) - f_l(x)| \le \|f_k - f_l\|_{L^\infty} < \varepsilon \quad \text{für } k, l \ge k(\varepsilon),$$

insbesondere ist $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ definiert. Weiter haben wir für $x \in X\backslash N$

$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_k(x)| \le \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^\infty}, \text{ und}$$

$$|f_k(x) - f(x)| = \lim_{l\to\infty} |f_k(x) - f_l(x)| \le \varepsilon \text{ für } k \ge k(\varepsilon).$$

Dies bedeutet $\|f\|_{L^\infty} \le \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^\infty} < \infty$ und $\|f_k - f\|_{L^\infty} \to 0$ mit $k \to \infty$. $\square$

Ein Teilergebnis des Beweises, das oft benutzt wird, ist die

6.19 Folgerung. *Gilt $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$, so konvergiert eine Teilfolge f_{k_j} punktweise μ-fast-überall gegen f.*

Auf die Wahl der Teilfolge in Folgerung 6.19 kann für $p < \infty$ im allgemeinen nicht verzichtet werden. Betrachte dazu folgendes

6.20 Beispiel. Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $n = 2^k + j$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 \le j < 2^k$. Betrachte die so gegebene Folge

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j\,2^{-k} \le x \le (j+1)2^{-k} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt $\int f_n \, d\mathcal{L}^1 = 2^{-k} < \frac{2}{n} \to 0$ mit $n \to \infty$. Andererseits gilt für gegebene $x \in [0,1)$ und $k \in \mathbb{N}$, wenn wir $j := [2^k x]$ (Gaußklammer) und $n = 2^k + j$ wählen,

$$j\, 2^{-k} \leq x < (j+1)2^{-k} \quad \Rightarrow \quad f_n(x) = 1.$$

Also gilt $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ für alle $x \in [0,1)$, das heißt die Folge f_n konvergiert nicht punktweise $\mathcal{L}^1$-fast-überall gegen Null.

Bis zum Ende des Kapitels betrachten wir speziell das n-dimensionale Lebesguemaß. Im Gegensatz zu einem allgemeinen Maßraum haben wir auf $\mathbb{R}^n$ eine Metrik zur Verfügung. Eine naheliegende Frage ist dann, ob L^p-Funktionen durch stetige Funktionen approximiert werden können. Ziel ist eine Version für L^p-Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, siehe Definition 6.12. Wie allgemein üblich schreiben wir kurz $L^p(\Omega)$ statt $L^p(\Omega, \mathcal{L}^n)$.

Für $K \subset \Omega$ kompakt sei $\operatorname{dist}(\cdot, K) : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $\operatorname{dist}(x,K) = \inf_{z\in K} |x - z|$ die Abstandsfunktion von K. Wir brauchen die folgenden beiden Tatsachen:

$$\operatorname{dist}(\cdot, K) \text{ ist Lipschitzstetig mit Konstante Eins.} \tag{6.21}$$

$$\operatorname{dist}(\mathbb{R}^n \backslash \Omega, K) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega} \operatorname{dist}(x,K) > 0. \tag{6.22}$$

6.23 Satz (Dichtheit von $C^0_c(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es zu jedem $f \in L^p(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C^0_c(\Omega)$ mit $\|f - f_k\|_{L^p(\Omega)} \to 0$.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage zuerst für $f = \chi_E$, wobei $E \subset \Omega$ eine $\mathcal{L}^n$-messbare Menge ist mit $\mathcal{L}^n(E) < \infty$. Nach Satz 4.7 existiert $K \subset E$ kompakt mit $\mathcal{L}^n(E\backslash K) < \varepsilon/2$. Setze

$$f_\varrho : \Omega \to [0,1],\ f_\varrho(x) = \left(1 - \frac{\operatorname{dist}(x,K)}{\varrho}\right)^+.$$

Nach (6.21), (6.22) ist $f_\varrho \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{spt} f_\varrho = \{x : \operatorname{dist}(x,K) \leq \varrho\}$ kompakte Teilmenge von Ω für $\varrho > 0$ hinreichend klein. Da $f_\varrho = f$ auf K, folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f_\varrho - f| \, d\mathcal{L}^n &\leq \int_{\Omega\backslash K} (|f_\varrho| + |f|) \, d\mathcal{L}^n \\
&\leq \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \operatorname{dist}(x,K) \leq \varrho\}) + \mathcal{L}^n(E\backslash K) \\
&< \varepsilon \quad \text{für } \varrho > 0 \text{ hinreichend klein.}
\end{aligned}$$

Sei nun $f \in L^p(\Omega)$ beliebig. Wir können $f \geq 0$ annehmen, sonst betrachte f^+ und f^-. Nach Satz 5.13 gibt es eine Folge $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ von nichtnegativen $\mathcal{L}^n$-Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$; dabei bezeichnet f_0 die Fortsetzung von f mit $f = 0$ auf $\mathbb{R}^n\backslash\Omega$. Es folgt