Bis zum Ende des Kapitels betrachten wir speziell das n-dimensionale Lebesguemaß. Im Gegensatz zu einem allgemeinen Maßraum haben wir auf $\mathbb{R}^n$ eine Metrik zur Verfügung. Eine naheliegende Frage ist dann, ob L^p-Funktionen durch stetige Funktionen approximiert werden können. Ziel ist eine Version für L^p-Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, siehe Definition 6.12. Wie allgemein üblich schreiben wir kurz $L^p(\Omega)$ statt $L^p(\Omega, \mathcal{L}^n)$.

Für $K \subset \Omega$ kompakt sei $\operatorname{dist}(\cdot, K) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $\operatorname{dist}(x, K) = \inf_{z \in K} |x - z|$ die Abstandsfunktion von K. Wir brauchen die folgenden beiden Tatsachen:

$$\operatorname{dist}(\cdot, K) \text{ ist Lipschitzstetig mit Konstante Eins.} \tag{6.21}$$

$$\operatorname{dist}(\mathbb{R}^n \backslash \Omega, K) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega} \operatorname{dist}(x, K) > 0. \tag{6.22}$$

6.23 Satz (Dichtheit von $C_c^0(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es zu jedem $f \in L^p(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C_c^0(\Omega)$ mit $\|f - f_k\|_{L^p(\Omega)} \to 0$.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage zuerst für $f = \chi_E$, wobei $E \subset \Omega$ eine $\mathcal{L}^n$-messbare Menge ist mit $\mathcal{L}^n(E) < \infty$. Nach Satz 4.7 existiert $K \subset E$ kompakt mit $\mathcal{L}^n(E \backslash K) < \varepsilon/2$. Setze

$$f_\varrho : \Omega \to [0, 1],\ f_\varrho(x) = \left(1 - \frac{\operatorname{dist}(x, K)}{\varrho}\right)^+.$$

Nach (6.21), (6.22) ist $f_\varrho \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{spt} f_\varrho = \{x : \operatorname{dist}(x, K) \leq \varrho\}$ kompakte Teilmenge von Ω für $\varrho > 0$ hinreichend klein. Da $f_\varrho = f$ auf K und $|f_\varrho - f| \leq 1$, folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f_\varrho - f|^p \, d\mathcal{L}^n &\leq \int_\Omega |f_\varrho - f| \, d\mathcal{L}^n \\
&\leq \int_{\Omega \backslash K} (|f_\varrho| + |f|) \, d\mathcal{L}^n \\
&\leq \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \operatorname{dist}(x, K) \leq \varrho\}) + \mathcal{L}^n(E \backslash K) \\
&< \varepsilon \quad \text{für } \varrho > 0 \text{ hinreichend klein.}
\end{aligned}$$

Sei nun $f \in L^p(\Omega)$ beliebig. Wir können $f \geq 0$ annehmen, sonst betrachte f^+ und f^-. Nach Satz 5.13 gibt es eine Folge $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ von nichtnegativen $\mathcal{L}^n$-Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$; dabei bezeichnet f_0 die Fortsetzung von f mit $f = 0$ auf $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Es folgt $f_k \to f_0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 6.6. Da jede Treppenfunktion endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen ist, ist der Satz bewiesen. $\square$

7 Der Satz von Fubini

Mit dem Cavalierischen Prinzip kann das Volumen von Körpern durch Zerlegung in parallele Schnitte berechnet werden. Allgemeiner können mit dem Satz von Fubini mehrdimensionale Integrale bzw. allgemeiner Integrale in Produkträumen auf Integrationen in den Faktoren zurückgeführt werden. Gleichzeitig liefert der Satz eine optimale Aussage zur Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integrationen bei iterierten Integralen.

Die Idee der Volumenberechnung durch Zerlegung in parallele Schnitte wurde schon von Archimedes benutzt und ist in folgender Fassung als Cavalierisches Prinzip bekannt: gilt für die Schnitte in jeder Höhe y von zwei Körpern $K, L \subset \mathbb{R}^3$ das Verhältnis $\mathcal{L}^2(K_y) = \theta\, \mathcal{L}^2(L_y)$, so folgt auch $\mathcal{L}^3(K) = \theta\, \mathcal{L}^3(L)$. Mit diesem Argument lässt sich das Volumen einer Kugel folgendermaßen berechnen.

7.1 Beispiel. Betrachte in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ die folgenden Mengen und die Maße ihrer zweidimensionalen Schnitte in Höhe $y \in (0,1)$; dabei sei $\pi = \mathcal{L}^2(\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\})$.

Zylinder:	$Z = \{(x,y) : \lvert x\rvert < 1,\, 0 < y < 1\}$	$\mathcal{L}^2(Z_y) = \pi$,
Kegel:	$K = \{(x,y) : \lvert x\rvert < y,\, 0 < y < 1\}$	$\mathcal{L}^2(K_y) = \pi\, y^2$,
Halbkugel:	$H = \{(x,y) : \lvert x\rvert < \sqrt{1-y^2},\, 0 < y < 1\}$	$\mathcal{L}^2(H_y) = \pi\,(1-y^2)$.

Durch Vergleich mit einem Quader gleicher Höhe und gleichen Querschnitts folgt aus dem Cavalierischen Prinzip $\mathcal{L}^3(Z) = \pi$. Betrachte weiter die Pyramide $P = \{y(x,1) : x \in (-1,1)^2,\, 0 < y < 1\}$. Sechs kongruente Exemplare setzen sich zu einem Würfel der Kantenlänge zwei zusammen, also gilt $6\,\mathcal{L}^3(P) = 8$. Wegen $\mathcal{L}^2(P_y) = 4y^2$ folgt aus dem Cavalierischen Prinzip $\mathcal{L}^3(K) = \frac{\pi}{4}\,\mathcal{L}^3(P) = \frac{\pi}{3}$. Schließlich erhalten wir, wieder mit Cavalieri,

$$\mathcal{L}^3(Z) = \mathcal{L}^3(K) + \mathcal{L}^3(H) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^3(H) = \frac{2\pi}{3}.$$

Insbesondere folgt $\mathcal{L}^3(K) : \mathcal{L}^3(H) : \mathcal{L}^3(Z) = 1 : 2 : 3$.

Wir wollen nun allgemein Produktmaße einführen, wobei wir uns an der Konstruktion des Lebesguemaßes aus Kapitel 4 orientieren können.

7.2 Definition (Produktmenge). *Seien α_i äußere Maße auf X_i für $i = 1, \ldots, n$. Eine Menge $P \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ heißt Produktmenge, wenn es α_i-messbare Mengen $A_i \subset X_i$ gibt mit $P = A_1 \times \ldots \times A_n$.*

Die Darstellung $P = A_1 \times \ldots \times A_n$ ist eindeutig, außer wenn $P = \emptyset$. In der nachfolgenden Definition des Produktinhalts λ ist die Vereinbarung $0 \cdot \infty = 0$ relevant.

7.3 Lemma. *Seien α_i äußere Maße auf X_i für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt:*

(1) *Das System $\mathcal{P}$ der Produktmengen ist ein Halbring.*
(2) *Die Funktion $\lambda : \mathcal{P} \to [0, \infty]$, $\lambda(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \alpha_i(A_i)$, ist ein Prämaß auf $\mathcal{P}$.*

Beweis: Aussage (1) wurde in Folgerung 1.6 bewiesen. Ist $P = A_1 \times \ldots \times A_n = \emptyset$, so ist $A_i = \emptyset$ für mindestens ein i und folglich $\lambda(P) = 0$. Die σ-Additivität zeigen wir durch Induktion über n, ähnlich wie in Satz 1.9. Setze dazu $\lambda'(A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} \alpha(A_i)$ für α_i-messbare Mengen $A_i \subset X_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Betrachte nun eine n-fache Produktmenge $P = A_1 \times \ldots \times A_n$. Für $y \in X_n$ ist der y-Schnitt von P gegeben durch

$$P_y = \{x \in X_1 \times \ldots \times X_{n-1} : (x, y) \in P\} = \begin{cases} A_1 \times \ldots \times A_{n-1} & \text{falls } y \in A_n \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $P = \bigcup_{j=1}^\infty P_j$ paarweise disjunkte Vereinigung von Produktmengen P_j, so erhalten wir wegen $P_y = \bigcup_{j=1}^\infty (P_j)_y$ aus der Induktionsannahme mit dem Satz über monotone Konvergenz, Satz 6.2,

$$\begin{aligned} \lambda(P) &= \int \lambda'(P_y)\, d\alpha_n(y) = \int \sum_{j=1}^\infty \lambda'((P_j)_y)\, d\alpha_n(y) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int \lambda'((P_j)_y)\, d\alpha_n(y) = \sum_{j=1}^\infty \lambda(P_j). \end{aligned}$$

Dies beweist Aussage (2). $\square$

7.4 Definition (Produktmaß). *Seien α_i außere Maße auf X_i für $i = 1, \ldots, n$. Das Produktmaß $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$ ist auf $E \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ wie folgt gegeben:*

$$(\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n)(E) = \inf\{\sum_{j=1}^\infty \lambda(P_j) : P_j \textit{ Produktmenge, } E \subset \bigcup_{j=1}^\infty P_j\}.$$

Damit ist $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$ die Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes λ.

Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k}$ ist ein wichtiges Beispiel für ein Produktmaß.

7.5 Lemma. *Es gilt $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n_1} \times \ldots \times \mathcal{L}^{n_k}$ für $n = n_1 + \ldots + n_k$.*

BEWEIS: Jeder Quader $P \subset \mathbb{R}^n$ ist das Produkt von Quadern $P_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ mit Inhalt $|P| = \mathcal{L}^{n_1}(P_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{L}^{n_k}(P_k)$. Die Ungleichung $\mathcal{L}^{n_1} \times \ldots \times \mathcal{L}^{n_k} \leq \mathcal{L}^n$ folgt damit aus den Definitionen 4.2 und 7.4. Umgekehrt ist zu zeigen, dass für jede Überdeckung $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i,1} \times \ldots \times A_{i,k}$ einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}^{n_j}$-messbaren Mengen $A_{i,j} \subset \mathbb{R}^{n_j}$ gilt:

$$\mathcal{L}^n(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n_1}(A_{i,1}) \cdot \ldots \cdot \mathcal{L}^{n_k}(A_{i,k}).$$

Indem wir aus E eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge entfernen, können wir $\mathcal{L}^n(A_{i,1} \times \ldots \times A_{i,k}) > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ annehmen. Zu $\theta > 1$ gibt es dann Quader $P_{i,j}^{\nu} \subset \mathbb{R}^{n_j}$ mit $A_{i,j} \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P_{i,j}^{\nu}$, so dass gilt:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |P_{i,j}^{\nu}| \leq \theta\, \mathcal{L}^{n_j}(A_{i,j}) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \text{ und } j = 1, \ldots, k.$$

Da $A_{i,1} \times \ldots A_{i,k} \subset \bigcup_{\nu_1,\ldots,\nu_k=1}^{\infty} P_{i,1}^{\nu_1} \times \ldots \times P_{i,k}^{\nu_k}$, folgt die Behauptung aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_k=1}^{\infty} |P_{i,1}^{\nu_1} \times \ldots \times P_{i,k}^{\nu_k}| &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=1}^{\infty} |P_{i,1}^{\nu_1}| \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{\nu_k=1}^{\infty} |P_{i,k}^{\nu_k}| \right) \\ &\leq \theta^k \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n_1}(A_{i,1}) \cdot \ldots \cdot \mathcal{L}^{n_k}(A_{i,k}). \end{aligned}$$

□

7.6 Satz (Cavalierisches Prinzip). *Seien α und β σ-endliche Maße auf X bzw. Y, und $D \subset X \times Y$ sei $\alpha \times \beta$-messbar. Dann ist $D_y = \{x \in X : (x,y) \in D\}$ α-messbar für β-fast-alle $y \in Y$, die Funktion $y \mapsto \alpha(D_y)$ ist β-messbar und es gilt*

$$(\alpha \times \beta)(D) = \int_Y \alpha(D_y)\, d\beta(y) = \int_Y \int_X \chi_D(x,y)\, d\alpha(x)\, d\beta(y).$$

Eine entsprechende Aussage gilt, wenn erst das β-Maß von $D_x = \{y \in Y : (x,y) \in D\}$ gebildet und dann bezüglich α über X integriert wird.

BEWEIS: Wir zeigen den Satz erst für $(\alpha \times \beta)(D) < \infty$. Nach Satz 3.16 gibt es eine Menge $E \supset D$ mit $E \in \sigma(\mathcal{P})$ und $(\alpha \times \beta)(E \backslash D) = 0$. Genauer besagt der dortige Zusatz: es kann $E = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} E^{\nu}$ gewählt werden, wobei $E^{\nu} = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{\nu}^{i}$ paarweise disjunkte Vereinigung von Produktmengen P_i^{ν} mit $E^1 \supset E^2 \supset \ldots$ und $(\alpha \times \beta)(E^1) < \infty$. Wir wollen zunächst folgende drei Aussagen beweisen:

$$E_y = \{x \in X : (x,y) \in E\} \text{ ist } \alpha\text{-messbar für alle } y \in Y, \tag{7.7}$$

$$\text{die Funktion } f_E : Y \to [0,\infty],\ y \mapsto \alpha(E_y) \text{ ist } \beta\text{-messbar}, \tag{7.8}$$

$$\gamma(E) := \textstyle\int_Y f_E \, d\beta = (\alpha \times \beta)(E). \tag{7.9}$$

Sei $\mathcal{E}$ das System aller $\alpha\times\beta$-messbaren Mengen mit (7.7), (7.8) und (7.9). Für eine Produktmenge $A \times B$ gilt $(A \times B)_y = A$, falls $y \in B$, und $(A \times B)_y = \emptyset$ sonst. Daraus folgt $A \times B \in \mathcal{E}$, und zwar genauer

$$f_{A\times B} = \alpha(A)\,\chi_B \qquad \text{und } \gamma(A \times B) = \alpha(A)\beta(B) = (\alpha \times \beta)(A \times B).$$

Als nächstes betrachte eine disjunkte Vereinigung $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \in \mathcal{E}$. Dann ist $E_y = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_y$ α-messbar, $f_E = \sum_{i=1}^{\infty} f_{E_i}$ ist β-messbar, und aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt

$$\gamma(E) = \int_Y \sum_{i=1}^{\infty} f_{E_i}\, d\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \int_Y f_{E_i}\, d\beta = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha \times \beta)(E_i) = (\alpha \times \beta)(E).$$

Schließlich sei $E^1 \supset E^2 \supset \ldots$ eine absteigende Folge mit $E^\nu \in \mathcal{E}$ und $(\alpha \times \beta)(E^1) < \infty$. Für $E = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} E^\nu$ ist $E_y = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} (E^\nu)_y$ α-messbar für alle $y \in Y$, und wegen $\int_Y f_{E^1}\, d\beta = (\alpha \times \beta)(E^1) < \infty$ gilt $\alpha((E^1)_y) = f_{E^1}(y) < \infty$ für β-fast-alle $y \in Y$. Aus Satz 2.19 folgt

$$f_E(y) = \alpha(E_y) = \lim_{\nu\to\infty} \alpha((E^\nu)_y) = \lim_{\nu\to\infty} f_{E^\nu}(y) \qquad \text{für } \beta\text{-fast-alle } y \in Y.$$

Insbesondere ist f_E β-messbar, und wegen $f_{E^\nu} \leq f_{E^1}$ liefert der Satz von Lebesgue

$$\gamma(E) = \int_Y f_E\, d\beta = \lim_{\nu\to\infty} \int_Y f_{E^\nu}\, d\beta = \lim_{\nu\to\infty} (\alpha \times \beta)(E^\nu) = (\alpha \times \beta)(E).$$

Insgesamt sind nun (7.7), (7.8) und (7.9) für E wie oben gezeigt. Durch Anwendung auf eine $\alpha \times \beta$-Nullmenge N statt D erhalten wir eine Menge $C \supset N$ mit $C \in \mathcal{E}$ und $(\alpha \times \beta)(C) = 0$, also folgt

$$0 = (\alpha\times\beta)(C) = \int_Y \alpha(C_y)\, d\beta(y) \quad \Rightarrow \quad \alpha(N_y) \leq \alpha(C_y) = 0 \text{ für } \beta\text{-fast-alle } y \in Y.$$

Daraus folgt mit $N = E \backslash D$ für β-fast-alle $y \in Y$: die Menge $D_y = E_y \backslash N_y$ ist α-messbar und es gilt $f_D(y) = f_E(y)$. Insbesondere ist f_D β-messbar und

$$\int_Y f_D\, d\beta = \int_Y f_E\, d\beta = (\alpha \times \beta)(E) = (\alpha \times \beta)(D).$$

Ist D lediglich $\alpha\times\beta$-messbar, so verwenden wir die Voraussetzung an α und β. Nach Lemma 3.15 gilt $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ für $\alpha\times\beta$-messbare D_n mit $(\alpha\times\beta)(D_n) < \infty$ und $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$. Also ist $D_y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n)_y$ messbar bezüglich α, es gilt $f_{D_1} \leq f_{D_2} \leq \ldots$ und

$$f_D(y) = \alpha(D_y) = \lim_{n\to\infty} \alpha((D_n)_y) = \lim_{n\to\infty} f_{D_n}(y).$$

Folglich ist f_D messbar bzgl. β und der Satz über monotone Konvergenz impliziert

$$\int_Y f_D\,d\beta = \lim_{n\to\infty} \int_Y f_{D_n}\,d\beta = \lim_{n\to\infty} (\alpha\times\beta)(D_n) = (\alpha\times\beta)(D).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass auf die Bedingung der σ-Endlichkeit der Maße im allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

7.10 Beispiel. Für $D = \{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : x = y\} \subset \mathbb{R}\times[0,1]$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{card}(D_x)\,d\mathcal{L}^1(x) = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} \mathcal{L}^1(D_y)\,d\operatorname{card}(y).$$

Mit $I_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ gilt $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=1}^{n} I_k \times I_k)$, also ist D messbar bezüglich $\mathcal{L}^1 \times \operatorname{card}$. Aus Satz 7.6 folgt $(\mathcal{L}^1\times\operatorname{card})(D) = \infty$.

Wir kommen nun zu Anwendungen des Cavalierischen Prinzips.

7.11 Beispiel. Wir berechnen das Lebesguemaß $\alpha_n = \mathcal{L}^n(B_1(0))$ der n-dimensionalen Kugel $B_1(0) = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| < 1\}$. Aus Lemma 7.5 und Satz 7.6 folgt mit der Substitution $y = \cos\vartheta$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \int_{-1}^{1} \mathcal{L}^{n-1}(\{x\in\mathbb{R}^{n-1} : |x| < \sqrt{1-y^2}\})\,dy \\ &= \alpha_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dy = \alpha_{n-1} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^n\vartheta\,d\vartheta}_{=:A_n}.\end{aligned}$$

Durch partielle Integration ergibt sich die Rekursionsformel $A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$ für $n \geq 2$, wobei $A_0 = \pi$ und $A_1 = 2$. Es folgt

$$\begin{aligned}A_{2k} &= \frac{2k-1}{2k}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot A_0 = \pi\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j} \\ A_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot A_1 = 2\prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}.\end{aligned}$$

Also gilt $A_{2k+1}A_{2k} = \frac{2\pi}{2k+1}$ bzw. $A_{2k}A_{2k-1} = \frac{\pi}{k}$, und somit

$$\begin{aligned}\alpha_{2k} &= (A_{2k}A_{2k-1})\cdot\ldots\cdot(A_2\,A_1)\alpha_0 = \frac{\pi^k}{k!}, \\ \alpha_{2k+1} &= (A_{2k+1}A_{2k})\cdot\ldots\cdot(A_3\,A_2)\alpha_1 = \frac{\pi^k}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

7.12 Beispiel. Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei $K(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} : 0 < y < 1,\, x/y \in A\}$; dies ist der Kegel mit Spitze 0 über der Basis $A \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wir behaupten: Ist A messbar bzgl. $\mathcal{L}^n$, so ist $K(A)$ messbar bzgl. $\mathcal{L}^{n+1}$ und es gilt

$$\mathcal{L}^{n+1}(K(A)) = \frac{1}{n+1}\,\mathcal{L}^n(A).$$

Dazu beachten wir zunächst $K(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times (0,1)$ sowie

$$K(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} K(A_i) \quad \text{und} \quad K(\mathbb{R}^n \backslash A) = (R^n \times (0,1)) \backslash K(A).$$

Also ist das System $\{A \subset \mathbb{R}^n : K(A) \text{ ist Borelmenge}\}$ eine σ-Algebra. Es ist leicht zu sehen, dass für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen auch $K(\Omega)$ offen in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Also ist für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ der Kegel $K(B)$ eine Borelmenge, insbesondere $\mathcal{L}^{n+1}$-messbar, und aus Satz 7.6 folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{n+1}(K(B)) &= \int_0^1 \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x/y \in B\})\,dy\\ &= \int_0^1 y^n\,\mathcal{L}^n(B)\,dy = \frac{1}{n+1}\,\mathcal{L}^n(B).\end{aligned}$$

Ist nun $A \subset \mathbb{R}^n$ lediglich $\mathcal{L}^n$-messbar, so gibt es nach Satz 4.8 Borelmengen $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit $B_1 \subset A \subset B_2$ und $\mathcal{L}^n(B_2 \backslash B_1) = 0$. Es folgt $K(B_1) \subset K(A) \subset K(B_2)$ und $\mathcal{L}^{n+1}(K(B_2) \backslash K(B_1)) = \mathcal{L}^{n+1}(K(B_2 \backslash B_1)) = 0$. Also ist $K(A)$ $\mathcal{L}^{n+1}$-messbar und die Formel für das Volumen des Kegels gilt auch für A.

Der folgende Satz über Integrale auf Produkträumen besitzt zahlreiche Anwendungen.

7.13 Satz (Fubini). *Seien α und β σ-endliche Maße auf X bzw. Y und $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sei $\alpha \times \beta$-messbar. Ist das Integral $\int f\,d(\alpha \times \beta)$ definiert, so gilt:*

- *$f(\cdot, y)$ ist α-messbar und $\int_X f(x,y)\,d\alpha(x)$ ist definiert für β-fast-alle $y \in Y$,*
- *$f(x, \cdot)$ ist β-messbar und $\int_Y f(x,y)\,d\beta(y)$ ist definiert für α-fast-alle $x \in X$,*
- *$y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\alpha(x)$ ist β-messbar und $\int_Y \int_X f(x,y)\,d\alpha(x)\,d\beta(y)$ ist definiert*
- *$x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\beta(y)$ ist α-messbar und $\int_X \int_Y f(x,y)\,d\beta(y)\,d\alpha(x)$ ist definiert,*

und vor allem

$$\int_{X \times Y} f\,d(\alpha \times \beta) = \int_Y \int_X f(x,y)\,d\alpha(x)\,d\beta(y) = \int_X \int_Y f(x,y)\,d\beta(y)\,d\alpha(x).$$

Zusatz: *Für $\alpha \times \beta$-messbares f ist die Voraussetzung erfüllt, wenn $f \geq 0$ oder wenn*

$$\int_Y \int_X |f(x,y)|\,d\alpha(x)\,d\beta(y) < \infty \text{ bzw. } \int_X \int_Y |f(x,y)|\,d\beta(y)\,d\alpha(x) < \infty.$$

Beweis: Sei $\varphi \in \mathcal{T}^+(\alpha \times \beta)$ eine Treppenfunktion mit Funktionswerten $\{s_1, \ldots, s_k\}$. Dann gilt mit $E_i = \{\varphi = s_i\}$

$$\varphi(\cdot, y) = \sum_{i=1}^{k} s_i \, \chi_{(E_i)_y} \text{ und } \int_X \varphi(x,y)\, d\alpha(x) = \sum_{i=1}^{k} s_i \, \alpha((E_i)_y).$$

Für φ folgen alle Behauptungen damit aus Satz 7.6. Betrachte als nächstes eine $\alpha \times \beta$-messbare Funktion $f : X \times Y \to [0, \infty]$. Nach Satz 5.13 gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots$ mit $\varphi_k(x,y) \nearrow f(x,y)$ für alle $(x,y) \in X \times Y$. Dann gilt $\varphi_k(\cdot, y) \nearrow f(\cdot, y)$ für alle $y \in Y$, insbesondere ist $f(\cdot, y)$ messbar bezüglich α. Weiter liefert der Satz über monotone Konvergenz $\int_X \varphi_k(x,y)\, d\alpha(x) \nearrow \int_X f(x,y)\, d\alpha(x)$ für alle $y \in Y$. Folglich ist die Funktion $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\alpha(x)$ messbar bezüglich β, und es folgt wieder mit dem Satz über monotone Konvergenz

$$\begin{aligned}
\int_Y \int_X f(x,y)\, d\alpha(x)\, d\beta(y) &= \lim_{k\to\infty} \int_Y \int_X \varphi_k(x,y)\, d\alpha(x)\, d\beta(y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{X\times Y} \varphi_k \, d(\alpha \times \beta) \\
&= \int_{X\times Y} f \, d(\alpha \times \beta).
\end{aligned}$$

Da sich bei vertauschter Reihenfolge der Integrationen bzgl. x und y ganz analog argumentieren lässt, ist der Satz für $f \geq 0$ bewiesen. Sei schließlich nur das Integral von f definiert, also zum Beispiel $\int f^- \, d(\alpha \times \beta) < \infty$. Wie gezeigt gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_Y \int_X f^-(x,y)\, d\alpha(x)\, d\beta(y) &= \int_X \int_Y f^-(x,y)\, d\beta(y)\, d\alpha(x) \\
&= \int_{X\times Y} f^- \, d(\alpha \times \beta) < \infty,
\end{aligned}$$

und es gibt eine β-Nullmenge $N \subset Y$ mit $\int_X f^-(x,y)\, d\alpha(x) < \infty$ für alle $y \in Y \backslash N$. Durch Abänderung zu $f = 0$ auf $X \times N$ können wir $N = \emptyset$ annehmen; beachte, dass hierdurch die Voraussetzungen und Behauptungen des Satzes nicht berührt werden. Folglich ist das Integral $\int_X f(x,y)\, d\alpha(x)$ für alle $y \in Y$ definiert, die Funktion

$$y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\alpha(x) = \int_X f^+(x,y)\, d\alpha(x) - \int_X f^-(x,y)\, d\alpha(x)$$

ist messbar bezüglich β, und es gilt

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\alpha(x) \right)^- d\beta(y) \leq \int_Y \int_X f^-(x,y)\, d\alpha(x)\, d\beta(y) < \infty.$$

Somit ist auch das Integral der Funktion $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\alpha(x)$ definiert, und aus der Linearität des Integrals, Satz 5.24, folgt

$$\begin{aligned}\int_Y \int_X f(x,y)\, d\alpha(x)\, d\beta(y) &= \int_Y \int_X (f^+(x,y) - f^-(x,y))\, d\alpha(x)\, d\beta(y)\\ &= \int_Y \int_X f^+(x,y)\, d\alpha(x)\, d\beta(y)\\ &\qquad - \int_Y \int_X f^-(x,y)\, d\alpha(x)\, d\beta(y)\\ &= \int_{X\times Y} f^+\, d(\alpha\times\beta) - \int_{X\times Y} f^-\, d(\alpha\times\beta)\\ &= \int_{X\times Y} f\, d(\alpha\times\beta).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz von Fubini bewiesen. Der Zusatz ist trivial für $f \geq 0$. Andernfalls gilt, wenn zum Beispiel das erste Integral endlich ist,

$$\int_{X\times Y} |f|\, d(\alpha\times\beta) = \int_Y \int_X |f(x,y)|\, d\alpha(x)\, d\beta(y) < \infty,$$

und f ist integrierbar bezüglich $\alpha\times\beta$ nach dem Majorantenkriterium, Satz 5.24. □

7.14 Beispiel. Ein Beispiel, wo die iterierten Integrale existieren aber verschieden sind, ist

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = \pi.$$

Beachte dabei, dass der Integrand gegeben ist durch $f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y}$ für $y \neq 0$. In diesem Fall folgt aus dem Satz von Fubini, dass das Integral bezüglich des Produktmaßes nicht existiert. Es kommt aber auch vor, dass die iterierten Integrale gleich sind, und dennoch das Integral bezüglich des Produktmaßes nicht definiert ist:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx = 0,$$

aber das $\mathcal{L}^2$-Integral über $[-1,1]^2$ existiert nicht wegen

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, d\mathcal{L}^2(x,y) &= \int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right) dy = \infty.\end{aligned}$$