7.15 Beispiel. Sei μ ein σ-endliches Maß auf X und $f : X \to [0,\infty]$ sei μ-messbar. Ist die Funktion $\varphi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ stetig mit $\varphi(0) = 0$, sowie auf $(0,\infty)$ stetig differenzierbar mit $\varphi'(t) \geq 0$, so gilt

$$\int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x) = \int_0^\infty \varphi'(t)\, \mu(\{x \in X : f(x) > t\})\, dt.$$

Betrachte dazu den Subgraph $E = \{(x,t) \in X \times [0,\infty) : t < f(x)\}$. Die Funktionen $(x,t) \mapsto t$, $(x,t) \mapsto f(x)$ und $(x,t) \mapsto \varphi'(t)$ sind $\mu \times \mathcal{L}^1$-messbar. Folglich ist auch E messbar bezüglich $\mu \times \mathcal{L}^1$ sowie die Funktion $(x,t) \mapsto \varphi'(t)\chi_E(x,t)$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x) &= \int_X \int_0^\infty \varphi'(t)\, \chi_E(x,t)\, dt\, d\mu(x) \\
&= \int_E \varphi'(t)\, d(\mu \times \mathcal{L}^1)(x,t) \\
&= \int_0^\infty \int_X \varphi'(t)\, \chi_E\,(x,t)\, d\mu(x)\, dt \\
&= \int_0^\infty \varphi'(t)\, \mu(\{x \in X : f(x) > t\})\, dt.
\end{aligned}$$

Für $\varphi(t) = t^p$ mit $p > 0$ und $f : X \to \mathbb{R}$ μ-messbar folgt zum Beispiel

$$\int_X |f|^p\, d\mu = \int_0^\infty p\, t^{p-1} \mu(\{x : |f(x)| > t\})\, dt.$$

Als weitere Anwendung des Satzes von Fubini zeigen wir die folgende Version der partiellen Integration im $\mathbb{R}^n$.

7.16 Satz (Partielle Integration). *Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f, \partial_j f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g, \partial_j g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ für ein $j \in \{1,\ldots,n\}$, und $p, q \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j f) g\, d\mathcal{L}^n = -\int_{\mathbb{R}^n} f(\partial_j g)\, d\mathcal{L}^n.$$

Beweis: Es reicht aus, die folgende Behauptung zu beweisen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f\, d\mathcal{L}^n = 0 \text{ für alle } f \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ mit } f, \partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{7.17}$$

Aus der Voraussetzung und der Hölderschen Ungleichung folgt $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sowie $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also ergibt sich mit (7.17)

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j(fg)\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j f) g\, d\mathcal{L}^n + \int_{\mathbb{R}^n} f(\partial_j g)\, d\mathcal{L}^n,$$

und die Behauptung des Satzes ist bewiesen. Wir zeigen (7.17) zunächst unter der Annahme, dass es ein $R > 0$ gibt mit $f(x) = 0$ für $|x_j| \geq R$. Der Satz von Fubini ergibt für $x = (\xi, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j f(\xi, x_n)\, d\xi\, dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_j f(\xi, x_n)\, dx_n\, d\xi.$$

Für $j = n$ ist das rechte Integral Null nach dem HauptSatz der Differential- und Integralrechnung, und für $1 \leq j \leq n-1$ verschwindet das mittlere Integral nach Induktion. Ist f beliebig wie in (7.17), so wähle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ sowie

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq 1, \\ 0 & \text{für } t \geq 2, \end{cases}$$

und definiere $\eta_R(x) = \varphi(\frac{x_j}{R})$. Dann ist $(\eta_R f)(x) = 0$ für $|x_j| \geq 2R$, und es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_R \partial_j f\, d\mathcal{L}^n = -\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j \eta_R) f\, d\mathcal{L}^n.$$

Nun gilt $\eta_R(x) = 1$ für $|x_j| \leq R$, insbesondere $\eta_R \to 1$ und $\partial_j \eta_R \to 0$ punktweise auf $\mathbb{R}^n$ mit $R \to \infty$. Außerdem haben wir mit $C = \max |\varphi'|$ die Abschätzungen

$$|\eta_R(\partial_j f)| \leq |\partial_j f| \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad |(\partial_j \eta_R) f)| \leq \frac{C}{R} |f| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Behauptung (7.17) folgt nun mit $R \to \infty$ aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue. □

Die Verallgemeinerung des Satzes von Fubini auf kartesiche Produkte mit endlich vielen (statt nur zwei) Faktoren soll hier nicht ausgeführt werden. Man zeigt analog zu Lemma 7.5, dass in einem endlichen Produkt von Maßen beliebig Klammern gesetzt oder weggelassen werden können. Der Satz von Fubini wird durch Induktion über die Anzahl der Faktoren verallgemeinert, wobei die Reihenfolge der Integrationen bezüglich der einzelnen Variablen beliebig gewählt werden kann.

8 Der Transformationssatz

Neben dem Satz von Fubini ist die Transformation auf geeignete Koordinaten das zweite wichtige Hilfsmittel zur Berechnung von Maßen beziehungsweise Integralen im $\mathbb{R}^n$. Nach einigen Beispielen behandeln wir in einem Exkurs die Umrechnung der Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Laplace auf beliebige krummlinige Koordinaten. Diese Formeln kommen bei diversen Problemen in Geometrie und Physik zur Anwendung.

Zu Anfang des Kapitels erinnern wir an folgenden Begriff:

8.1 Definition (Diffeomorphismus). *Eine Abbildung $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt C^1-Diffeomorphismus, wenn φ bijektiv ist und φ, φ^{-1} stetig differenzierbar sind.*

8.2 Beispiel (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$). Betrachte die glatte Abbildung

$$\varphi : (0,\infty)\times(0,2\pi) = U \to V = \mathbb{R}^2\backslash\{(x,0) : x \geq 0\},\ \varphi(r,\varphi) = (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi).$$

Die Umkehrabbildung von φ lautet mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\varphi^{-1}(x,y) = \begin{cases} (r,\, \arccos\frac{x}{r}) & \text{falls } y \geq 0, \\ (r,\, 2\pi - \arccos\frac{x}{r}) & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Für $x < 0$ gilt alternativ $\varphi^{-1}(x,y) = (r, \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{y}{r})$, insbesondere ist φ^{-1} glatt auf ganz V und somit φ diffeomorph.

Unser Beweis des Transformationssatzes stützt sich auf folgendes Lemma. Dabei verwenden wir für $p \in \mathbb{R}^n$ und $\varrho > 0$ die Bezeichnung $Q(p,\varrho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| \leq \varrho/2\}$ mit $\|x\| = \max_{1\leq k\leq n}|x_k|$, das heißt $Q(p,\varrho)$ ist der achsenparallele Würfel mit Mittelpunkt p und Volumen $\varrho^n > 0$.

8.3 Lemma. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in C^1(U,V)$ ein Diffeomorphismus und $x_0 \in U$. Ist $Q_j = Q(q_j,\varrho_j) \subset U$ eine Folge mit $x_0 \in Q_j$ für alle j und $\varrho_j \to 0$, so gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\mathcal{L}^n\big(\varphi(Q_j)\big)}{\mathcal{L}^n(Q_j)} = |\det D\varphi(x_0)|.$$

Beweis: Nach geeigneten Translationen können wir $x_0 = 0$ und $\varphi(0) = 0$ annehmen. Außerdem ist φ Lipschitzstetig mit einer Konstanten $\Lambda \in [0,\infty)$ nach evtl. Verkleinerung von U. Schließlich reicht es, die Behauptung für eine Teilfolge zu beweisen. Wir führen nun einen blowup, das heißt eine Reskalierung, durch. Setze dazu $U_j = \frac{1}{\varrho_j} U$, $V_j = \frac{1}{\varrho_j} V$, $P_j = \frac{1}{\varrho_j} Q_j = Q(p_j, 1)$ mit $p_j = \frac{1}{\varrho_j} q_j$ und

$$\varphi_j : U_j \to V_j,\, \varphi_j(x) = \frac{1}{\varrho_j}\,\varphi(\varrho_j x) \quad \text{sowie} \quad \psi_j : V_j \to U_j,\, \psi_j(y) = \frac{1}{\varrho_j}\psi(\varrho_j y).$$

Wegen $0 \in P_j$ gilt $\|p_j\| \leq 1$, also nach Wahl einer Teilfolge $p_j \to p \in \mathbb{R}^n$ mit $\|p\| \leq 1$. Sei $P = Q(p,1)$ und $S = D\varphi(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Für $y \in S(\operatorname{int} P)$ gilt wegen $D\psi(0) = S^{-1}$

$$\psi_j(y) = \frac{1}{\varrho_j}\,\psi(\varrho_j y) = \int_0^1 D\psi(t\varrho_j y)\, y\, dt \to S^{-1} y \in \operatorname{int} P.$$

Es folgt $\psi_j(y) \in P_j$ für j hinreichend groß, das heißt wegen $y = \varphi_j(\psi_j(y))$ gilt

$$y \in S(\operatorname{int} P) \quad \Rightarrow \quad y \in \varphi_j(P_j) \text{ für } j \in \mathbb{N} \text{ hinreichend groß.} \tag{8.4}$$

Sei umgekehrt $y \in \varphi_j(P_j)$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$, also $y = \varphi_j(x_j)$ für $x_j \in P_j$. Nach Wahl einer Teilfolge gilt $x_j \to x \in P$, und aus $D\varphi(0) = S$ folgt

$$y = \frac{1}{\varrho_j}\,\varphi(\varrho_j x_j) = \int_0^1 D\varphi(t\varrho_j x_j)\, x_j\, dt \to Sx \in S(P).$$

Im Umkehrschluss bedeutet das

$$y \notin S(P) \quad \Rightarrow \quad y \notin \varphi_j(P_j) \text{ für } j \in \mathbb{N} \text{ hinreichend groß.} \tag{8.5}$$

Da $S(\partial P)$ nach Satz 4.15 eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge ist, konvergiert die Folge $\chi_{\varphi_j(P_j)}$ nach (8.4) und (8.5) punktweise $\mathcal{L}^n$-fast-überall gegen $\chi_{S(P)}$. Nun ist φ_j Lipschitzstetig mit Konstante Λ, und folglich gilt $\varphi_j(P_j) \subset Q(0, 2\Lambda)$ für alle j. Aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue und der linearen Transformationsformel, Satz 4.19, folgt

$$\frac{\mathcal{L}^n(\varphi(Q_j))}{\mathcal{L}^n(Q_j)} = \mathcal{L}^n(\varphi_j(P_j)) \to \mathcal{L}^n(S(P)) = |\det S| = |\det D\varphi(0)|.$$

□

8.6 Satz. (Transformationsformel) *Für einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

(1) $\mathcal{L}^n(\varphi(D)) = \int_D |\det D\varphi|\, d\mathcal{L}^n$ *für alle $\mathcal{L}^n$-messbaren $D \subset U$,*

(2) $\int_V f\, d\mathcal{L}^n = \int_U f \circ \varphi\, |\det D\varphi|\, d\mathcal{L}^n$ *für alle $\mathcal{L}^n$-messbaren $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$, falls eines der Integrale definiert ist.*

Beweis: Um (1) zu zeigen, betrachten wir auf U die Maße $\lambda = \mathcal{L}^n \llcorner |\det D\varphi|$ sowie $\mu = \varphi^{-1}(\mathcal{L}^n)$. Nach Satz 6.3 (ii) und Satz 4.15 (i) gilt

$$N \subset U \text{ mit } \mathcal{L}^n(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(N) = \mu(N) = 0. \tag{8.7}$$

Ist $D \subset U$ $\mathcal{L}^n$-messbar, so ist D auch messbar bezüglich λ und μ. Für λ folgt dies aus Satz 6.3(1), für μ ist (2.16) mit $f = \varphi^{-1}$ anwendbar wegen Satz 4.15 (ii). Indem wir nun U durch offene, relativ kompakte Mengen ausschöpfen, können wir $\lambda(U) < \infty$ und $\mu(U) < \infty$ voraussetzen. Nach Satz 4.8 gilt $D = E \backslash N$ für eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge N und $E = \bigcap_{i=1}^\infty U_i$ mit offenen $U_i \subset U$. Wegen Satz 2.19 (iii) (hier brauchen wir $\lambda(U), \mu(U) < \infty$) reicht es daher aus, die Gleichheit $\lambda = \mu$ auf allen offenen Mengen nachzuweisen. Aber nach Lemma 1.25 ist jede offene Menge als abzählbare Vereinigung von kompakten, achsenparallelen Würfeln in U darstellbar. Damit bleibt schließlich zu zeigen:

$$\lambda(Q_0) = \mu(Q_0) \text{ für alle } Q_0 = Q(p_0, \varrho_0) \subset U. \tag{8.8}$$

Angenommen dies ist falsch, zum Beispiel gelte $\mu(Q_0)/\lambda(Q_0) \leq \theta < 1$. Zerlege Q_0 durch Halbierung der Kanten in kompakte Teilwürfel $Q_{0,1}, \ldots, Q_{0,2^n}$. Wäre $\mu(Q_{0,i}) > \theta\, \lambda(Q_{0,i})$ für alle i, so folgt durch Summation

$$\mu(Q_0) = \sum_{i=1}^{2^n} \mu(Q_{0,i}) > \theta \sum_{i=1}^{2^n} \lambda(Q_{0,i}) = \theta\, \lambda(Q_0),$$

ein Widerspruch. Hierbei wurde benutzt, dass die Ränder der $Q_{0,i}$ nach (8.7) jeweils Nullmengen sind. Unter den $Q_{0,i}$ gibt es also einen Würfel Q_1 mit $\mu(Q_1)/\lambda(Q_1) \leq \theta$. Bestimme nun induktiv eine Schachtelung $Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots$ mit

$$\frac{\mu(Q_j)}{\lambda(Q_j)} \leq \theta < 1 \text{ für alle } j \in \mathbb{N}. \tag{8.9}$$

Für $x_0 = \bigcap_{j=1}^\infty Q_j \in U$ gilt wegen der Stetigkeit der Funktion $\det D\varphi$

$$\frac{\lambda(Q_j)}{\mathcal{L}^n(Q_j)} = \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q_j)} \int_{Q_j} |\det D\varphi|\, d\mathcal{L}^n \to |\det D\varphi(x_0)| \text{ mit } j \to \infty.$$

Zusammen mit Lemma 8.3 folgt aber nun

$$\frac{\mu(Q_j)}{\lambda(Q_j)} = \frac{\mu(Q_j)}{\mathcal{L}^n(Q_j)} \frac{\mathcal{L}^n(Q_j)}{\lambda(Q_j)} \to 1 \text{ mit } j \to \infty,$$

ein Widerspruch zu (8.9). Dies zeigt (8.8), womit Behauptung (1) bewiesen ist. Für $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt $\{f \circ \varphi < s\} = \varphi^{-1}(\{f < s\})$. Nach Satz 4.15 (ii) ist mit f auch $f \circ \varphi$ messbar bezüglich $\mathcal{L}^n$ und umgekehrt. Ist dies vorausgesetzt, so folgt (2) zunächst für $f = \chi_B$ aus (1), indem man $D = \varphi^{-1}(B)$ setzt, dann für $f \geq 0$ durch Approximation von unten durch Treppenfunktionen nach Satz 5.13 und schließlich für allgemeine f durch Zerlegung in f^+ und f^-. $\square$

8.10 Beispiel (Gauß-Integral). Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ folgt aus dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mathcal{L}^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, dy \right) dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx \right)^2.$$

Für Polarkoordinaten $\varphi : (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) : x \geq 0\}$ gilt $\det D\varphi(r,\vartheta) = r$. Da $\{(x,0) : x \geq 0\}$ eine $\mathcal{L}^2$-Nullmenge ist, folgt aus dem Transformationssatz, und anschließend dem Satz von Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mathcal{L}^2 = \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} e^{-r^2} r \, d\mathcal{L}^2(r,\vartheta) = \int_0^\infty e^{-r^2} r \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) dr = \pi.$$

Also gilt $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$.

8.11 Beispiel (Lineare Transformationsformel). Betrachte den Spezialfall von Satz 8.6, dass der Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ Einschränkung einer linearen Abbildung ist, das heißt $\varphi(x) = Sx$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt $D\varphi(x) = S$ für alle $x \in U$, und die Formeln aus dem Transformationsatz lauten, vgl. auch Satz 4.19,

$$\mathcal{L}^n(S(D)) = |\det S| \, \mathcal{L}^n(D)$$
$$\int_V f(y) \, d\mathcal{L}^n(y) = |\det S| \int_U f(Sx) \, d\mathcal{L}^n(x).$$

Wir kommen jetzt zu der Umrechnung von Differentialoperatoren in neue Koordinaten. Es ist nützlich, dazu den folgenden Begriff zu kennen.

8.12 Definition (Riemannsche Metrik). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Riemannsche Metrik auf U ist eine Abbildung, die jedem $x \in U$ ein Skalarprodukt $g(x)(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zuordnet. Bezüglich der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ gilt für $v, w \in \mathbb{R}^n$ die Darstellung*

$$g(x)(v,w) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) v_i w_j \quad \text{mit } g_{ij}(x) = g(x)(e_i, e_j).$$

Die Koeffizientenmatrix $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$ wird ebenfalls mit g bezeichnet. Die Riemannsche Metrik g ist von der Klasse C^k auf U, falls $g_{ij} \in C^k(U)$ für alle $i,j = 1, \ldots, n$.

Die Bogenlänge einer C^1-Kurve $\gamma : I = [a,b] \to U$ bezüglich der Riemannschen Metrik g ist wie folgt definiert:

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma(t))\big(\gamma'(t), \gamma'(t)\big)} \, dt. \tag{8.13}$$

8.14 Beispiel. Die hyperbolische Metrik auf dem oberen Halbraum $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ ist gegeben durch

$$g(x)(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{x_n^2} \quad \text{bzw.} \quad g_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}.$$

Bezüglich dieser Metrik hat jede Kurve $\gamma : [a,b) \to U$ mit $\lim_{t \nearrow b} \gamma_n(t) = 0$ unendliche Bogenlänge, denn es gilt

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\gamma_n(t)}\, dt \geq \left| \int_a^b \frac{\gamma_n'(t)}{\gamma_n(t)}\, dt \right| = \infty.$$

In diesem Beispiel war die Riemannsche Metrik abstrakt gegeben. Hier interessieren wir uns in erster Linie für Riemannsche Metriken, die auf folgende Weise entstehen; dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stets das Standardskalarprodukt.

8.15 Definition (induzierte Metrik). *Sei $\varphi \in C^1(U,V)$, ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Die durch φ induzierte Riemannsche Metrik ist*

$$g(x)(v,w) = \langle D\varphi(x)v, D\varphi(x)w\rangle \quad \text{für } x \in U,\ v,w \in \mathbb{R}^n.$$

Die zugehörige Koeffizientenmatrix lautet

$$g(x) = \big(\langle \partial_i \varphi(x), \partial_j \varphi(x)\rangle\big)_{1 \leq i,j \leq n} = {}^t D\varphi(x) D\varphi(x).$$

Ist φ von der Klasse C^k, so ist g von der Klasse C^{k-1} auf U.

Die induzierte Riemannsche Metrik beschreibt die Längen- und Maßverhältnisse im Bild von φ. Genauer gilt:

8.16 Lemma. *Sei $\varphi \in C^1(U,V)$ ein Diffeomorphismus zwischen den offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit induzierter Riemannscher Metrik g. Dann folgt*

(1) *$L(\varphi \circ \gamma) = L_g(\gamma)$ für alle Kurven $\gamma \in C^1(I,U)$;*

(2) *$\mathcal{L}^n(\varphi(E)) = \int_E \sqrt{\det g}\, d\mathcal{L}^n$ für alle $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen $E \subset U$.*

Beweis: Für die erste Aussage berechnen wir mit $I = [a,b]$

$$\begin{aligned}
L(\varphi \circ \gamma) &= \int_a^b |(\varphi \circ \gamma)'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\langle D\varphi(\gamma(t))\gamma'(t), D\varphi(\gamma(t))\gamma'(t)\rangle}\, dt \\
&= \int_a^b \sqrt{g(\gamma(t))\big(\gamma'(t), \gamma'(t)\big)}\, dt \\
&= L_g(\gamma).
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt aus dem Transformationssatz, denn nach den Rechenregeln für die Determinante gilt

$$\det g = \det\big({}^t D\varphi D\varphi\big) = \big(\det D\varphi\big)^2.$$

□

8.17 Beispiel (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$). Betrachte für $U = (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$ und $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,z) : x \geq 0\}$ die Polarkoordinatenabbildung

$$\varphi : U \to V,\ \varphi(r,\vartheta,\varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\cos\vartheta).$$

Durch Bestimmung der Umkehrabbildung sieht man, dass φ diffeomorph ist. Die Jacobimatrix von φ lautet

$$D\varphi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\ \cos\varphi & r\ \cos\vartheta\ \cos\varphi & -r\ \sin\vartheta\ \sin\varphi \\ \sin\vartheta\ \sin\varphi & r\ \cos\vartheta\ \sin\varphi & r\ \sin\vartheta\ \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\ \sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich für die induzierte Metrik

$$\big(g_{ij}(r,\vartheta,\varphi)\big)_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Bogenlänge einer Kurve $\varphi \circ \gamma$ mit $\gamma(t) = \big(r(t), \vartheta(t), \varphi(t)\big)$ ist somit

$$L(\varphi\circ\gamma) = \int_I \sqrt{(r')^2 + r^2(\vartheta')^2 + r^2(\sin\vartheta)^2(\varphi')^2}.$$

Für das Lebesguemaß von $\varphi(E)$ für $E = [r_1,r_2] \times [\vartheta_1,\vartheta_2] \times [\varphi_1,\varphi_2]$ ergibt sich zum Beispiel

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^3\big(\varphi(E)\big) &= \int_{r_1}^{r_2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta dr \\ &= \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2)(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Allgemein wird durch Lemma 8.16 folgende Definition nahegelegt. Die Notation $\mu \llcorner \theta$ betzeichnet dabei das Maß mit Dichte θ, siehe Satz 6.3.

8.18 Definition (Riemannsches Volumen). *Sei g eine Riemannsche Metrik der Klasse C^0 auf U. Dann heißt $\mu_g = \mathcal{L}^n \llcorner \sqrt{\det g}$ (Riemannsches) Maß bezüglich g. Es gilt also*

$$\mu_g(E) = \int_E \sqrt{\det g}\, d\mathcal{L}^n \qquad \textit{für alle } \mathcal{L}^n\textit{-messbaren } E \subset U.$$