Abteilung für Angewandte Mathematik 23.01.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2005/2006 — Woche 12

Abgabe: Montag, den 6. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $Z := S^1 \times (-1,1)$. Berechnen Sie $\int_Z |x|^2 \, d\omega_Z$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{S^2} x^2\, y^2\, z^2 \, d\omega_{S^2}$.

Aufgabe 3: **8 Punkte**

Für $R > 0$ sei $A \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, (x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2\big\}.$$

Skizzieren Sie A und berechnen Sie das Volumen von A.

$$\left(\text{Zur Kontrolle: } \mathrm{Vol}(A) = \frac{2}{3}(\pi - 4/3)\, R^3\right).$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Es sei $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ und $r(x) := x^{-\alpha}$ für $x \geq 1$. Zeigen Sie, dass der Rotationskörper

$$\big\{(x,y,z) \in [1,\infty) \times \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 + z^2 \leq (r(x))^2\big\}$$

ein endliches Volumen, aber eine unendliche Oberfläche hat.