Abteilung für Angewandte Mathematik 06.02.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2005/2006 — Woche 13

Abgabe: Montag, den 13. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es seien $p, q, r \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ (mit $\frac{1}{\infty} = 0$). Zeigen Sie, dass

$$* \,:\, L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R}) \to L^r(\mathbb{R}),\ (f, g) \mapsto f * g$$

wohldefiniert, bilinear und stetig ist und dass die **verallgemeinerte Young'sche Ungleichung**

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

gilt. Tipp: Wenden Sie für $1 < r < \infty$ die Hölder'sche Ungleichung an auf

$$|f(x-y)\, g(y)| = |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}} \big(|f(x-y)|^p\, |g(y)|^q\big)^{\frac{1}{r}}\, |g(y)|^{1-\frac{q}{r}}.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass für $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $g \in L^q(\mathbb{R})$ mit $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt $f * g \in C^0(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Seien $f, g \in C^0_c(\mathbb{R})$ (stetig mit kompakten Träger). Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, dass für alle offenen, beschränkten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand und alle $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_\Omega (\partial_i f) g \, d\mathcal{L}^n = -\int_\Omega f(\partial_i g)\, d\mathcal{L}^n + \int_{\partial\Omega} (fg)\nu_i \, d\omega.$$

Aufgabe 5: **4 Punkte**

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die Oberfläche von S^n. Sie dürfen davon ausgehen, dass das Volumen der $(n+1)$-dimensionalen Einheitskugel bekannt ist.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{S^n} x^2 \, d\omega_{S^n}$. (Hierbei ist x ist die erste Koordinate.)