Analysis III — WS 2005/06 — Woche 2

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/ana3_WS05

Abgabe: Montag, den 7. November, vor der Vorlesung

Der Begriff *Ring* wird sowohl in der Algebra als auch bei uns in der Maßtheorie gebraucht. Mit diesen Aufgaben soll gezeigt werden, dass beide Begriffe stark zusammenhängen. Wiederholen wir hierzu kurz die Definition eines Ringes im Sinne der Algebra:

Definition: Ein *Ring* (im Sinne der Algebra) ist eine Menge R, die mit zwei Verknüpfungen $+ : R \times R \to R$ (Addition) und $\cdot : R \times R \to R$ (Multiplikation) ausgestattet ist derart, dass $(R, +)$ eine additive, abelsche Gruppe ist und dass für alle $a, b, c \in R$ gilt $a(bc) = (ab)c$ (Assoziativgesetz) und $a(b + c) = ab + bc$, $(a + b)c = ac + bc$ (Distributivgesetze). Ein Ring heißt kommutativ, wenn für alle $a, b \in R$ gilt $ab = ba$. Man beachte, dass wir in unserer Definition nicht fordern, dass R ein Einselement hat. Ein Einselement $1 \in R$ hat die Eigenschaft $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ für alle $a \in R$.

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Für $A, B \subset X$ definieren wir die *symmetrische Differenz* $A \triangle B$ durch

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

d.h. $A \triangle B$ enthält genau die $x \in X$, die genau in einer der Mengen A und B liegen.
Zeigen Sie: Versieht man 2^X mit der symmetrischen Differenz $\triangle$ als Addition und der Durchschnittsbildung $\cap$ als Multiplikation, so ist $(2^X, \triangle, \cap)$ ein kommutativer Ring (im Sinne der Algebra) mit Nullelement $\emptyset$ und Einselement X.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $R \subset 2^X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(R, \triangle, \cap)$ ist ein Ring im Sinne der Algebra.

(b) $\emptyset \in R$ und für alle $A, B \in R$ gilt $A \triangle B \in R$, $A \cap B \in R$.

(c) $\emptyset \in R$ und für alle $A, B \in R$ gilt $A \triangle B \in R$, $A \cup B \in R$.

(d) $\emptyset \in R$ und für alle $A, B \in R$ gilt $A \cup B \in R$, $A \setminus B \in R$.

(e) R ist ein Ring im Sinne der Maßtheorie.