Abteilung für Angewandte Mathematik 07.11.05
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Analysis III — WS 2005/06 — Woche 3

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/ana3_WS05

Abgabe: Montag, den 14. November, vor der Vorlesung

Definition: Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über X. Falls $X \in \mathcal{R}$ ist, so nennt man $\mathcal{R}$ eine *Algebra* über X.

Aufgabe 1: 5 Punkte

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $\mathcal{R}$ ein Ring (eine Algebra) über Y. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(\mathcal{R}) := \left\{ f^{-1}(A) \,:\, A \in \mathcal{R} \right\}$$

eine Ring (eine Algebra) über X ist.

Aufgabe 2: 5 Punkte

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring (eine Algebra) über Y und sei $X \subset Y$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{R}|_X := \left\{ A \cap X \,:\, A \in \mathcal{R} \right\}$$

eine Ring (eine Algebra) über X ist.

Tipp: Machen Sie sich das Leben einfach und benutzen Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3: 5 Punkte

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über X. Sei

$$\mathcal{A} := \mathcal{R} \cup \left\{ A^{\complement} \,:\, A \in \mathcal{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ die kleinste Algebra ist, die $\mathcal{R}$ enthält, d.h. jede Algebra $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}'$ erfüllt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

Aufgabe 4: 5 Punkte

Sei $\mathcal{E} \subset 2^X$ durchschnittsstabil und vereinigungsstabil. Definiere

$$\mathcal{H} := \left\{ A \setminus B \,:\, A, B \in \mathcal{E} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ ein Halbring ist.