Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening 14.11.05

Analysis III — WS 2005/06 — Woche 4

Abgabe: Montag, den 21. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A} \subset 2^X$ ein Ring (eine Algebra, eine σ-Algebra). Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \big\{ B \subset Y \,:\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \big\}$$

ein Ring (eine Algebra, eine σ-Algebra) ist.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $\mathcal{E} \subset 2^Y$ ein beliebiges Mengensystem. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$.

Tipp zur Inklusion „$\subset$“: Sei $\mathcal{B} := \{B \subset Y \,:\, f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\}$ wie in Aufgabe 1 *(Prinzip der guten Mengen)*. Zeigen Sie $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$, $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}$ und nutzen Sie $f^{-1}(\mathcal{B}) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ ein äußeres Maß und sei $\mathcal{M}$ das System der μ-messbaren Mengen. Sei $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$d(A, B) := \mu(A \triangle B), \qquad\qquad A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \mu(A \triangle B) = 0.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{M}/\sim, d)$ ein metrischer Raum ist.

Definition: Eine Menge $\mathcal{R} \subset 2^X$ heißt *Dynkin-System*, falls

(i) $X \in \mathcal{R}$,

(ii) $A \setminus B \in \mathcal{R}$ für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $B \subset A$,

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ für alle paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{R}$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $\mathcal{R} \subset 2^X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mathcal{R}$ ist eine σ-Algebra.

(b) $\mathcal{R}$ ist ein durchschnittsstabiles Dynkin-System.