Abteilung für Angewandte Mathematik 21.11.05
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Analysis III — WS 2005/06 — Woche 5

Abgabe: Montag, den 28. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **8 Punkte**

Sei $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß. Wir definieren $\overline{\mathcal{A}}$ und $\overline{\lambda}$ (vgl. Vorlesung nach Definition 3.22) durch

$$D \in \overline{\mathcal{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists C, E \in \mathcal{A} \text{ mit } C \subset D \subset E \text{ und } \lambda(E \setminus C) = 0,$$
$$\overline{\lambda}(D) := \lambda(C).$$

Zeigen Sie, dass $\overline{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra ist und $\overline{\lambda} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ ein wohldefiniertes, vollständiges Maß mit $\overline{\lambda}|_{\mathcal{A}} = \lambda$ ist.

Definition: Eine Menge $\mathcal{R} \subset 2^X$ heißt *Dynkin-System*, falls

(i) $X \in \mathcal{R}$,

(ii) $A \setminus B \in \mathcal{R}$ für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $B \subset A$,

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ für alle paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{R}$.

Aufgabe 2: **8 Punkte**

(a) Sei $\mathcal{E} \subset 2^X$. Zeigen Sie, dass es ein kleinstes Dynkinsystem $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ gibt, welches $\mathcal{E}$ enthält.

(b) Sei $\mathcal{E} \subset 2^X$ durchschnittsstabil. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Tipp zu (b), $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$: Sei $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Für alle $D \in \mathcal{D}$ definieren wir $\mathcal{G}(D) := \{M \subset X : M \cap D \in \mathcal{D}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}(D)$ ein Dynkinsystem ist. Zeigen Sie, dass für jedes $E \in \mathcal{E}$ gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}(E)$. Folgern Sie hieraus für jedes $D \in \mathcal{D}$ und $E \in \mathcal{E}$, dass $D \in \mathcal{G}(E)$ und $E \in \mathcal{G}(D)$. Folgern Sie $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}(D)$ für jedes $D \in \mathcal{D}$. Folgern Sie hieraus, dass $\mathcal{D}$ durchschnittsstabil ist.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar. Zeigen Sie, dass A eine Nullmenge bzgl. der Carathéodory-Fortsetzung des Elementarinhalts ist.