Abteilung für Angewandte Mathematik 28.11.05
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

**Analysis III — WS 2005/06 — Woche 6**

**Abgabe: Montag, den 5. Dezember, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1:** **8 Punkte**

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^1([a,b])$.

(a) Sei $E := \{x \in [a,b] \,:\, f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $f(E)$ eine Lebesgue Nullmenge ist.

Tipp: Benutzen Sie Satz 4.14 aus der Vorlesung.

(b) Sei $G := \{x \in [a,b] \,:\, f(x) = 0\}$ und $H := \{x \in [a,b] \,:\, f(x) = 0, f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $G \setminus H$ eine Lebesgue Nullmenge ist.

Tipp: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x \in [a,b] \,:\, f(x) = 0, |f'(x)| \geq \frac{1}{n}\}$. Zeigen Sie, dass jedes $A_n$ kompakt ist und nur endliche viele Elemente enthält.

**Definition:** Sei $A_n \in 2^X$. Dann definieren wir den *Limes Superior* und den *Limes Inferior* durch

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

**Aufgabe 2:** **6 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $A_n \in \mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n, \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(b) Sei $\mu(\bigcup_{k\geq N} A_n) < \infty$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mu(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(c) Zeigen Sie $\mu(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

**Aufgabe 3:** **6 Punkte**

Sei $\mu \,:\, 2^X \to [0,\infty)$ ein äußeres Maß und sei $\mathcal{M}$ das System der $\mu$-messbaren Mengen. Sei $d \,:\, \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to [0,\infty)$ definiert durch

$$d(A,B) := \mu(A \triangle B), \qquad A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \mu(A \triangle B) = 0.$$

Aus Aufgabe 3 Woche 4 wissen wir, dass $(\mathcal{M}/\sim, d)$ ein metrischer Raum ist. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{M}/\sim, d)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

Tipp: Zu einer Cauchyfolge $A_n$ wählen sie eine „schnell konvergierende" Teilfolge $B_n$, d.h. $d(B_n, B_{n+1}) \leq 2^{-n}$. Sei $B_\infty := \limsup_n B_n$. Für $m < n$ sei $C_{m,n} := \bigcup_{k=m}^n B_k$. Folgern Sie aus $B_m \triangle \bigcup_{k=m}^n B_k \subset \bigcup_{k=m}^{n-1} (B_k \triangle B_{k+1})$, dass $\mu(B_m \triangle C_{m,n}) < 2^{1-m}$. Sei $C_m := \bigcup_{k=m}^\infty B_k$, so ist $B_\infty = \bigcap_{m=1}^\infty C_m$. Folgern Sie aus $d(B_m, B) \leq d(B_m, C_m) + d(C_m, B)$, dass $\lim_{m\to\infty} d(B_m, B) = 0$. Warum folgt hieraus $\lim_{j\to\infty} d(A_j, B) = 0$?