Abteilung für Angewandte Mathematik 5.12.05
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Analysis III — WS 2005/06 — Woche 7

Abgabe: Montag, den 12. Dezember, vor der Vorlesung

Definition:
Sei μ ein Maß auf X und seien f, f_n μ-messbare, fast überall endliche Funktionen. Man sagt, dass die Folge f_n *im Maß gegen f konvergiert*, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\big\{x \in X \,:\, |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\big\}\big) = 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Wir schreiben kürzer: $f_n \to f$ im Maß.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei μ ein Maß auf X und sei $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass aus $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ schon $f_n \to f$ im Maß folgt.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei μ ein Maß auf X mit $\mu(X) < \infty$. Seien f_n, f μ-messbar und fast überall endlich. Die Folge f_n konvergiere fast überall gegen f. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ im Maß gilt.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Nach Aufgabe 1 und Aufgabe 2 folgt, dass aus $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ schon $f_n \to f$ im Maß folgt. Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt. Geben Sie eine Folge messbarer Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, so dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für kein $x \in [0,1]$ existiert.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Betrachten Sie das Zählmaß card auf $\mathbb{N}$. Welche Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sind integrierbar und was ist ihr Integral?