Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening 12.12.05

Analysis III — WS 2005/06 — Woche 8

Abgabe: Montag, den 19. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ und $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Zeigen Sie, dass A beschränkt ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar mit $\mathcal{L}^n(A) > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(0) \subset \{x - y \,:\, x, y \in A\}$.

Tipp: Beweis durch Widerspruch. Betrachen Sie $\int \chi_{A \cup (A+z_n)}\, d\mu$ für eine geeignete Nullfolge z_n. Benutzen Sie die Translationsinvarianz des Lebesguemaßes.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Sei μ ein Maß auf X mit $\mu(X) < \infty$. Seien f_n, f μ-messbar und fast überall endlich. Dann konvergiert die Folge f_n gegen f im Maß, wenn jede Teilfolge $\{f_{n_k}\}$ eine Teilfolge $\{f_{n_{k_j}}\}$ besitzt, die μ-fast überall gegen f konvergiert.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $1 \leq p < \infty$ und $f_n, f \in L^p$. Weiterhin konvergiere $f_n \to f$ fast überall und $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ in L^p gilt.

Tipp: Wenden Sie das Lemma von Fatou auf $\varphi_n := 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ an.

Aufgabe 5: **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei

$$d(f,g) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \, \frac{\mu(\{|f-g| > \frac{1}{j}\})}{1 + \mu(\{|f-g| > \frac{1}{j}\})}.$$

(a) Sei Y der Raum, der μ-messbaren Funktionen, die fast überall endlich sind. Wir definieren $\sim$ auf Y wie folgt: $f \sim g$ genau dann, wenn $f = g$ fast überall. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $Y/\sim$ ist.

(b) Sei $f_n, f \in Y$. Zeigen Sie: $f_n \to f$ im Maß genau dann, wenn $d(f, f_n) \to 0$.