Abteilung für Angewandte Mathematik 19.12.05
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Analysis III — WS 2005/06 — Woche 9

Abgabe: Montag, den 16. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $f_n, f \in L^1(\mu)$, so dass f_n fast überall gegen f konvergiert. Weiterhin gebe es Funktionen $h_n, h \in L^1(\mu)$ derart, dass $|f_n| \leq h_n$ (fast überall) und $h_n \to h$ in $L^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0 \qquad \text{und} \qquad \int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

Dies ist eine verallgemeinerte Version der majorisierten Konvergenz.

Aufgabe 2: **15 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $p, q \in [1, \infty)$. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$\begin{aligned} f(\cdot, \eta) &: x \mapsto f(x, \eta) && \text{ist messbar auf } \Omega \text{ für alle } \eta \in \mathbb{R}, \\ f(x, \cdot) &: \eta \mapsto f(x, \eta) && \text{ist stetig auf } \mathbb{R} \text{ für fast alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Es gebe eine Funktion $a \in L^q(\Omega)$ und ein $b > 0$ so, dass für fast alle $x \in \Omega$ und alle $\eta \in \mathbb{R}$

$$|f(x, \eta)| \leq |a(x)| + b \, |\eta|^{p/q}.$$

Für $u \in L^p(\Omega)$ definieren wir $(Fu)(x) := f(x, u(x))$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass F eine stetige Abbildung von $L^p(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$ ist und für ein $c > 0$ und alle $u \in L^p(\Omega)$ gilt

$$\|Fu\|_{L^q(\Omega)} \leq c \left(\|a\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \right). \tag{1}$$

Diese Aussage unterteilen wir in mehrere Schritte

(a) **Messbarkeit:**
Zeigen Sie, dass $F(u)$ für alle $u \in L^p(\Omega)$ Lebesgue-messbar ist.
Tipp: Approximieren Sie durch Treppenfunktionen.

(b) **Beschränktheit:**
Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^p(\Omega)$ die Abschätzung (1) gilt.
Tipp: Nutzen Sie die Hölderabschätzung und die Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^2$.

(c) **Stetigkeit:**
Zeigen Sie, dass F stetig von $L^p(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$ ist.
Tipp: Sei $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$. Zeigen Sie zunächst Konvergenz von $F(u_n) \to F(u)$ in $L^q(\Omega)$ für eine geeignete Teilfolge u_{n_k}: Zeigen Sie $f(\cdot, u_{n_k}) \to f(\cdot, u)$ fast überall. Benutzen Sie nun Aufgabe 1 mit $h_n := c_1(|a|^p + |u_n|^p + |f(\cdot, u)|^q)$ mit $c_1 > 0$. Zeigen Sie, dass auch für die ganze Folge $F(u_n) \to F(u)$ in $L^q(\Omega)$ gilt.