Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

18.10.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 1

Abgabe: **Donnerstag, 25.10.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass jede abzählbare Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ bzgl. des Lebesguemaßes messbar ist und Maß Null besitzt.

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $\mathcal{N}$ und $\overline{\mathcal{S}}$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{A \subset X \,:\, \text{es existiert } B \in \mathcal{S} \text{ mit } A \subset B, \mu(B) = 0\}, \\ \overline{\mathcal{S}} &:= \{A \cup B \,:\, A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{S}\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathcal{S}}$ eine σ–Algebra ist.

(b) Sei $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{S}} \to [0, \infty]$ definiert durch:

$$\overline{\mu}(A \cup B) := \mu(B) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{S}.$$

Zeigen Sie, dass $\overline{\mu}$ wohldefiniert ist und ein vollständiges Maß auf $\overline{\mathcal{S}}$ definiert.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $A \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A) < \infty$ heisst *Atom* genau dann, wenn gilt:

(i) $\mu(A) > 0$,

(ii) Aus $B \in \mathcal{S}$, $B \subset A$ folgt: $\mu(B) = \mu(A)$ oder $\mu(A \setminus B) = \mu(A)$.

Zeigen Sie, dass das Lebesguemaß keine Atome besitzt.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Sei $\mathcal{S}$ eine σ–Algebra auf X und sei $f : X \to [0, \infty)$. Für $B \in \mathcal{S}$ sei

$$\mu(B) := \sum_{x \in B} f(x) := \sup_K \left\{ \sum_{x \in K} f(x) \,:\, K \subset B, K \text{ endlich} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass μ ein Maß auf $\mathcal{S}$ ist.

Hinweis:

Den aktuellen Aufgabenzettel und das aktuelle Kapitel des Kurzskripts findet Ihr immer Donnerstag nach der Vorlesung unter der folgenden Adresse:
http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa1_WS01_02/
Diese Seite kann auch ausgehend von http://www.mathematik.uni-freiburg.de durch Klicken auf `Institut für Angewandte Mathematik`, dann `Lehre`, nun `Vorlesungsskripte/Übungsblätter` und anschließend `Funktionalanalysis I` erreichen.