Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

25.10.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 2

Abgabe: **Donnerstag, 01.11.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie eine Funktionenfolge $f_n \in \mathcal{L}^1([0,1])$ an, so dass

(a) $\int\limits_{[0,1]} |f_n|\,dx \to 0$, aber $f_n(x)$ konvergiert für kein $x \in [0,1]$.

(b) $f_n \to 0$ fast überall, aber $\int\limits_{[0,1]} |f_n|\,dx \not\to 0$.

Tipp: Indikatorfunktionen.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Überprüfen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert. Wenn ja, so berechnen Sie diesen.

$$\lim_n \int\limits_{[0,1]} \sin^n(x)\,dx$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Sie μ das Lebesguemaß und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine messbare Menge mit $\mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie dass gilt:

Ist $f, f_k \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ mit $f_k \to f$ fast überall. Dann sind äquivalent:

(a) $\int\limits_\Omega |f_k - f|\,dx \to 0$.

(b) Es gilt $\sup\limits_k \int\limits_E |f_k|\,dx \to 0$, wenn $\mu(E) \to 0$.

Tipp: Benutzen Sie Egoroff.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Definition: Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Seien f, f_n messbar und fast überall endlich. Man sagt f_n konvergiert im Maß gegen f genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_k \mu\big(\{x \in X \,:\, |f(x) - f_k(x)| \geq \epsilon\}\big) = 0$$

Seien $f, f_k \in \mathcal{L}^1$. Zeigen Sie:

(a) Aus $\int_X |f_k - f| \, d\mu \to 0$ folgt, dass f_k gegen f im Maß konvergiert.

(b) Konvergiert f_k gegen f im Maß, so gibt es eine Teilfolge f_{k_n}, so dass $f_{k_n} \xrightarrow{n} f$ fast überall.
Tipp: Wähle Teilfolge f_{n_j}, so dass $A_j := \mu(\{|f - f_{n_j}| \geq 1/j\}) < 2^{-j}$. Sei $B := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$. Zeige, dass f_{n_j} auf $X \setminus B$ für $j \to \infty$ punktweise konvergiert und $\mu(B) = 0$ gilt.