Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

30.10.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 3

Abgabe: **Donnerstag, 08.11.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Sei $\mathcal{S}$ eine σ–Algebra auf X. Eine Mengenabbildung $\gamma : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heisst signiertes Maß auf $\mathcal{S}$ genau dann, wenn

(a) $\gamma(\emptyset) = 0$,

(b) $\gamma\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n)$ für alle paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{S}$.

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$E \mapsto \int\limits_E f\,dx$$

ein signiertes Maß auf der σ–Algebra der Lebesgue–messbaren Mengen definiert.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine messbare Menge und sei $1 \leq p \leq \infty$. Eine Folge f_n aus $L^p(\Omega)$ heißt *Cauchyfolge in* $L^p(\Omega)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon\, \forall n, m \geq N_\varepsilon \,:\, \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

(a) Zeigen Sie, dass es zu jeder Cauchyfolge in $L^\infty(\Omega)$ ein $f \in L^\infty(\Omega)$ gibt, mit $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jeder Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ ein $f \in L^p(\Omega)$ gibt, mit $\|f - f_n\|_p \to 0$ für $n \to \infty$.

Tipp: Wählen Sie Teilfolge f_{n_j}, so dass für $g_{j+1} := f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$ gilt: $\|g_j\|_p \leq 2^{-j}$. Zeigen Sie, dass $\sum_j |g_j|$ fast überall endlich ist und deshalb f_{n_j} fast überall eine Cauchyfolge bzgl. j ist. Definieren Sie das Grenzelement $f \in L^p(\Omega)$ und zeigen Sie $\|f - f_{n_j}\|_p \to 0$ für $j \to \infty$. Schließen Sie dann auf die ursprüngliche Folge.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Sei μ das Lebesguemaß und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine messbare Menge mit $\mu(\Omega) < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass man in der dritten Aufgabe auf Blatt 2 auf die Voraussetzung $f \in L^1(\Omega)$ verzichten kann, d.h. zeigen Sie:

Ist $f_k \in L^1(\Omega)$ mit $f_k \to f$ fast überall. Dann sind äquivalent:

(a) $f \in L^1(\Omega)$ und $\int\limits_{\Omega} |f_k - f| \, dx \to 0$.

(b) Es gilt $\sup\limits_{k} \int\limits_{E} |f_k| \, dx \to 0$, wenn $\mu(E) \to 0$.

(b) Sei f_n eine Folge in $L^p(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Es gelte weiterhin $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$. Zeigen Sie, dass $f \in L^1(\Omega)$ und $\|f - f_n\|_1 \to 0$ für $n \to \infty$.