Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

08.11.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 4

Abgabe: **Donnerstag, 15.11.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Beweisen Sie folgende Variante des Satzes über die dominierte Konvergenz:
Sei $g_k, g \in L^1$ mit $g_k \to g$ fast überall und

$$\lim_k \int_X g_k \, d\mu \to \int_X g \, d\,\mu.$$

Ist $f_k \in L^1$ und f eine messbare Funktion mit $f_k \to f$ fast überall und $|f_k| \leq g_k$ fast überall für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $f \in L^1$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, dx = 0.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst $f \in L^1$. Wenden Sie anschließend das Lemma von Fatou auf $|f| + g_k - |f - f_k|$ an.

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Sei H ein Hilbertraum und $F : H \to \mathbb{R}$ ein beschränktes, lineares Funktional. Nach Definition ist

$$\|F\| \equiv \inf \big\{ K\,;\, |F(u)| \leq K\|u\| \text{ für alle } u \in H \big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\|F\| = \sup \left\{ \frac{|F(u)|}{\|u\|}\,;\, u \in H \setminus \{0\} \right\} = \sup \big\{ |F(u)|\,;\, \|u\| \leq 1 \big\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F \mapsto \|F\|$ eine Norm auf H^*, dem Raum der linearen, beschänkten Funktionale auf H, definiert.

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Sei $1 \leq p < \infty$. Für $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $s \in \mathbb{R}$ sei der Translationsoperator T_s definiert durch

$$T_s(f)(t) := f(t-s).$$

Die Menge $\{T_s : s \in \mathbb{R}\}$ definiert offensichtlich eine Gruppe mit $T_s \circ T_t = T_{s+t}$ und $T_0 = \mathrm{Id}$.

(a) Zeigen Sie $\|T_s g\|_p = \|g\|_p$ und $\lim\limits_{s \to 0} \|T_s g - g\|_p = 0$ für alle $g \in L^p(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie, dass nicht $\lim\limits_{s \to 0} \|T_s - \mathrm{Id}\|_p = 0$ gilt. (Vorsicht Operatornorm!)

Tipp zu (a): Wählen Sie $h \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|g - h\|_1 < \varepsilon$.