Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

15.11.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 5

Abgabe: **Donnerstag, 22.11.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Sei $l^2 = \{(a_j)_{j\in\mathbb{N}} : a_j \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty\}$. Zeigen Sie, dass l^2 mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ mit $f = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $g = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ zum Hilbertraum wird.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Seien H_1, H_2, H_3 Hilberträume. Zeigen Sie, dass für alle stetigen, linearen Abbildungen $A, B : H_1 \to H_2$, $C : H_2 \to H_3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \qquad \|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|, \qquad \|CA\| \leq \|C\|\,\|A\|.$$

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei H ein Hilbertraum und $F \in H^*$. Dann gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein $f \in H$, so dass

$$F(u) = (u, f) \text{ für alle } u \in H.$$

Zeigen Sie, dass $\|F\|_{H^*} = \|f\|_H$ gilt.

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Sei H ein Hilbertraum und M eine dichte Teilmenge. Beweisen Sie für alle $x \in H$:

$$\|x\| = \sup_{y\in H, \|y\|\leq 1} |(x, y)| = \sup_{y\in M, \|y\|\leq 1} |(x, y)|.$$

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Seien H_1, H_2 Hilberträume und sei $L(H_1; H_2)$ der Raum der linearen, stetigen Abbildungen von H_1 nach H_2.

(a) Zeigen Sie, dass $L(H_1; H_2)$ ein vollständiger, normierter Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : L(H_1; H_2) \to L(H_2; H_1) : A \mapsto A^*$ ein isometrischer Isomorphismus zwischen $L(H_1; H_2)$ und $L(H_2; H_1)$ ist, d.h. Φ ist linear, injektiv, surjektiv und es gilt $\|A\|_{L(H_1;H_2)} = \|A^*\|_{L(H_2;H_1)}$ für alle $A \in L(H_1; H_2)$.

(c) Zeigen Sie, dass $A = A^{**}$ für alle $A \in L(H_1; H_2)$.