Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

22.11.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 6

Abgabe: **Donnerstag, 29.11.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Sei H ein unendlich dimensionaler, separabler Hilbertraum.

(a) Zeigen Sie, dass H keine abzählbare Hamelbasis besitzt. (Eine Hamelbasis ist eine Basis im Sinne der linearen Algebra, d.h. eine System linear unabhängiger Vektoren, deren endliche Linearkombinationen den ganzen Vektorraum aufspannen.)

(b) Zeigen Sie, dass es eine Lineare Abbildung $A : H \to H$ gibt, welche nicht stetig ist. (Sie dürfen benutzen, dass jeder Vektorraum eine Hamelbasis besitzt. Diese Aussage wird übrigens mit dem Lemma von Zorn bewiesen.)

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Sei $B_{\mathbb{C}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{C}$. Sei $H := L^2(B_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass die Polynome $e_k(z) := z^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ ein Orthogonalsystem in H bilden und berechnen sie $\|e_k\|_H$.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Seien H_1, H_2 Hilberträume und M eine dichte Teilmenge von H_1. Weiterhin sei $L : M \to H_2$ ein linearer Operator mit $\|Lx\|_{H_2} \leq K \|x\|_{H_1}$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie, dass L genau eine wohldefinierte, stetige Fortsetzung $L : H_1 \to H_2$ besitzt.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Sei H ein Hilbertraum und F ein linearer Teilraum. Zeigen Sie:

(a) Das orthogonale Komplement $F^\perp$ von F ist abgeschlossen.

(b) $(\overline{F})^\perp = F^\perp$ (wobei $\overline{F}$ der Abschluss von F ist).

(c) $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

Tipp: (c) Zeigen Sie zunächst $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$. Benutzen Sie für die umgekehrte Inklusion die folgende Aussage über direkte Summen von Vektorräumen: Aus $X = A \oplus B$, $X = A \oplus C$ und $B \subset C$ folgt $B = C$.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Sei H ein Hilbertraum und A ein linearer, stetiger, selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie, dass (Ax, x) für alle $x \in H$ reell ist und

$$\|A\| = \sup \big\{ |(Ax, x)| \,:\, \|x\| \le 1 \big\}.$$

Tipp: Sei C die rechte Seite. Drücken Sie $\mathrm{Re}(Ax, y)$ durch $(A(x+y), x+y)$ und $(A(x-y), (x-y))$ aus. Ersetzen Sie y durch γy mit $\gamma \in \mathbb{C}$ und $|\gamma| = 1$, so dass $\mathrm{Re}(Ax, y) = |(Ax, y)|$. Folgern Sie daraus $\|A\| \le C$.