Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

29.11.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 7

Abgabe: **Donnerstag, 06.12.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei H ein Hilbertraum und $x_n, x, y_n, y \in H$. Zeigen Sie:

(a) Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $y_n \to y$, folgt $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

(b) Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\|_H \to \|x\|_H$, folgt $x_n \to x$ stark in H.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei H ein separabler Hilbertraum und $B_1(0) := \{x \in H \,:\, \|x\|_H < 1\}$.

(a) Sei $\overline{B_1(0)}$ der Abschluss (bzgl. der starken Konvergenz) von $B_1(0)$ und sei $\partial B_1(0)$ der dazugehörige Rand. Zeigen Sie, dass $\overline{B_1(0)} = \{x \in H \,:\, \|x\|_H \leq 1\}$ und $\partial B_1(0) = \{x \in H \,:\, \|x\|_H = 1\}$.

(b) Zeigen Sie, dass der Abschluss von $\partial B_1(0)$ bzgl. der schwachen Konvergenz wieder $\overline{B_1(0)}$ ergibt.

Tipp: Sei e_n ein vollständiges Orthonormalsystem. Für $x \in B_1(0)$ wähle $x_n := x + \alpha_n e_n$ mit geeigneten $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei H ein Hilbertraum und $A, B \in L(H;H)$. Man sagt $A \geq B$ genau dann, wenn $A - B$ positiv semidefinit ist, d.h. $\forall\, x \in H \,:\, \big((A-B)x, x\big) \geq 0$. Zeigen Sie:

(a) „$\geq$“ ist transitiv ($A \geq B$, $B \geq C \Rightarrow A \geq C$), reflexiv ($A \geq A$) und additiv ($A \geq B$, $C \geq D \Rightarrow A + C \geq B + D$).

(b) Sind A, B selbstadjungiert mit $A \geq B$ und $B \geq A$, so folgt $A = B$.

(c) Sind A, B selbstadjungiert und $A \geq B \geq 0$, so folgt $\|A\|_{L(H;H)} \geq \|B\|_{L(H;H)}$.

(d) Sei H separabel und sei $A_j, B \in L(H;H)$ selbstadjungiert mit $A_{j+1} \geq A_j$ und $B \geq A_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann existiert $A \in L(H;H)$ mit $A_j x \rightharpoonup Ax$ für alle $x \in H$.

Tipp: Wählen Sie ein vollständiges Orthonormalsystem e_n. Wählen Sie Teilfolge von A_j, so dass $A_j e_n$ schwach konvergiert. Wählen Sie Diagonalunterfolge, so dass $A_j e_n$ für alle n konvergiert. Dies definiert eine lineare Abbildung $A \in L(H;H)$, die $A_j e_n \overset{j}{\rightharpoonup} Ae_n$ für alle n erfüllt. Schließen Sie daraus $A_j x \overset{j}{\rightharpoonup} Ax$ für alle $x \in H$ (immer noch für die Teilfolge). Mit $\mathrm{Re}(A_j x, y) = \frac{1}{4}\big((A_j(x+y), x+y) - (A_j(x-y), x-y)\big)$ und der von der Teilfolge unabhängigen Konvergenz der rechten Seite können Sie von der Teilfolge auf die Folge schließen.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und

$$A := \{\varphi \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega) \,:\, \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} < 1\},$$
$$B := \{\psi_0\} \qquad \text{für ein } \psi_0 \in L^2(\Omega) \setminus C(\Omega) \text{ mit } \|\psi_0\|_{L^2(\Omega)} = \tfrac{1}{2}.$$

Zeigen Sie, dann man die konvexen Mengen A und B nicht trennen kann, d.h. es gibt kein $f \in (L^2(\Omega))^* \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq \alpha < f(b)$ für alle $a \in A, b \in B$. (Die Menge $\{\varphi \in L^2(\Omega) \,:\, f(\varphi) = \alpha\}$ ist eine Hyperebene in $L^2(\Omega)$.)