Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

06.12.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 8

Abgabe: **Donnerstag, 13.12.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Seien H_1, H_2, H_3 Hilberträume. Mit $K(H_1; H_2)$ bezeichnen wir die Menge der linearen, vollstetigen Operatoren von H_1 nach H_2. Insbesondere ist nach Vorlesung $K(H_1; H_2)$ ein Teilraum von $L(H_1; H_2)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $A \in K(H_1; H_2)$, $B \in L(H_2; H_3)$ gilt: $BA \in K(H_1; H_3)$.

(b) Für alle $C \in L(H_1; H_2)$, $D \in K(H_2; H_3)$ gilt: $DC \in K(H_1; H_3)$.

(c) $K(H_1; H_2) = L(H_1; H_2)$ genau dann, wenn $\dim H_1 < \infty$ oder $\dim H_2 < \infty$.

Tipp: $\Rightarrow$: (Widerspruchsbeweis) Wählen Sie Orthonormalsysteme $e_n \in H_1$ und $f_n \in H_2$. Konstruieren Sie $T \in L(H_1; H_2)$ mit $T(e_n) = f_n$.
$\Leftarrow$: Nutzen Sie (a) und (b).

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Für $d_n \in \mathbb{R}$ sei $T : l^2 \to l^2$ definiert durch

$$T\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := \big(d_n a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie, dass T genau dann ein vollstetiger, linearer Operator ist, wenn d_n eine Nullfolge ist.