Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 13.12.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 9

Abgabe: **Donnerstag, 20.12.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(3 Punkte)**

Sei H_1, H_2 Hilberträume und $A_n, A \in L(H_1, H_2)$ mit $A_n x \rightharpoonup Ax$ in H_2 für alle $x \in H_1$. Zeigen Sie, dass $\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$.

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Sei H ein separabler Hilbertraum und sei $A \in L(H, H)$ selbstadjungiert, vollstetig und $A \geq \alpha \mathrm{Id}$ für ein $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass es einen selbstadjungierten Operator $B \in L(H, H)$ gibt mit $B \geq 0$ und $B^2 = A$. Außerdem gilt $\|B\|^2 = \|A\|$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Sei e_n ein bzgl. des Skalarprodukts $(x, y)_A := (Ax, y)$ vollständiges Orthonormalsystem und $V_n := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Sei $P_n : H \to V_n$ die orthogonale Projektion (orthonal bzgl. $(\cdot,\cdot)_A$) von H auf V_n. Zeigen Sie, dass P_n stetig bzgl. $\|\cdot\|_H$ ist. Als $(\cdot,\cdot)_A$–orthogonale Projektion ist P_n selbstadjungiert bzgl. $(\cdot,\cdot)_A$ und $P_n^2 = P_n$. Sei P_n^* die Adjungierte von P_n bzgl. $(\cdot,\cdot)$.

(b) Sei $A_n : V_n \to V_n$ definiert durch $A_n := P_n^* A P_n$. Zeigen Sie:

(i) A_n ist selbstadjungiert bzgl. $(\cdot,\cdot)_A$, $A_n \geq 0$,

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N} : A_n \leq A_{n+1}$ und $\|A_n\| \leq \|A_{n+1}\|$,

(iii) $A_n x \rightharpoonup Ax$ für alle $x \in H$,

(iv) $\forall\, n \in \mathbb{N} : A_n \leq A$, $\|A_n\| \leq \|A\|$,

(c) Da V_n endlichdimensional, kann man A_n durch eine positiv semidefinite, symmetrische Matrix darstellen. Damit existieren orthogonale Matrizen S_n und eine Diagonalmatrix D_n mit $S_n^* A_n S_n = D_n$. Sei $B_n := S_n \sqrt{D_n} S_n^*$. Damit definiert B_n einen Operator $B_n : V_n \to V_n$. Zeigen Sie: $B_n^2 = A_n$, $\|B_n\|^2 = \|A_n\|$ und B_n erfüllt ebenfalls die Eigenschaften (i) und (ii).

(d) Konstruieren Sie nun $B \in L(H, H)$ mit $B_n x \rightharpoonup Bx$ für alle $x \in H$. Folgern Sie $B_n \leq B$ und $B_n x \to Bx$ für alle $x \in H$ (Tipp: $\limsup_{n\to\infty} \|Bx - B_n x\|_H^2$). Zeigen Sie damit $B^2 = A$.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Seien H_1, H_2 und H_3 Hilberträume, $T \in L(H_1; H_2)$ und $J \in L(H_2; H_3)$. Sei weiterhin T vollstetig und J injektiv. Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\|Tx\|_{H_2} \leq \varepsilon \|x\|_{H_1} + C_\varepsilon \|JTx\|_{H_3} \quad \text{für alle } x \in H.$$

Tipp: Widerspruchsbeweis.