Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

20.12.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 10

Abgabe: **Donnerstag, 10.01.2002** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Beweisen Sie, dass für $I = [0,1]$ der Operator $K : C(I) \to C(I)$ mit

$$(Kf)(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$$

kompakt ist, aber keinen Eigenwert besitzt. (Tipp: Arzela-Ascoli)

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Sei $H := L^2(I)$ mit $I = [0,1]$. Der Operator G sei definiert durch

$$(G(v))(x) := \int_I g(x,y)v(y)\, dy$$

$$\text{mit} \qquad g(x,y) := \begin{cases} (1-x)y & \text{für } 0 \le y \le x, \\ (1-y)x & \text{für } x \le y \le 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $G \in L(H;H)$ und G ist vollstetig,

(b) Die von Null verschiedenen Eigenwerte von G sind $\left(\frac{1}{j\pi}\right)^2$, $j \in \mathbb{N}$, mit Eigenfunktionen $v_j = \sin(j\pi x)$.

Tipp: Berechnen Sie $(Gv)''(x)$ für glattes v. Wieso ist v glatt?

(c) Die Eigenfunktionen bilden eine vollständiges Orthonormalsystem von H.

(d) Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Gleichung $(G - \lambda\mathrm{Id})v = f$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tipp: Entwickeln Sie f in Eigenfunktionen.

Aufgabe 3 **(7 Punkte)**

(a) Sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in L(H;H)$. Weiterhin sei

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda\mathrm{Id} - T)^{-1} \text{ existiert und ist stetig}\},$$
$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\mathrm{Id} - T \text{ ist nicht stetig invertierbar}\},$$

Zeigen Sie, dass $\sigma(T)$ kompakt ist.

Tipp: Zeigen Sie, dass für $\|T\| < 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ gegen $(\mathrm{Id} - T)^{-1}$ konvergiert. Folgern Sie hieraus, dass $\rho(T)$ offen ist.

(b) Zeigen Sie, dass es für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ einen Operator $S \in L(l^2;l^2)$ gibt mit $\sigma(S) = K$.

Tipp: Versuchen Sie $S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (d_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.