Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

10.01.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 11

Abgabe: **Donnerstag, 17.01.2002** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(3 Punkte)**

Sei ℓ der Raum der Folgen mit der Metrik

$$\rho(a,b) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|a_j - b_j|}{1 + |a_j + b_j|}.$$

Zeigen Sie, dass eine Folge $a^{(k)} \in \ell$ genau dann gegen $a \in \ell$ konvergiert, wenn $a_j^{(k)} \xrightarrow{k} a_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie die Äquivalenz von:

(a) A ist überdeckungskompakt,

(b) A ist folgenkompakt,

(c) (A, d) ist vollständig und A ist präkompakt, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele, offene ε-Kugel, die A überdecken.

Tipp: Ringschluss. (c) $\Rightarrow$ (a): Sei $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von A. Eine Teilmenge $C \subset A$ habe die Eigenschaft (E) genau dann, wenn C sich nicht durch endlich viele U_λ überdecken lässt. Also hat A die Eigenschaft (E). Sei $\varepsilon_n := 2^{-n}$. Da A sich mit endlich vielen ε_1 –Kugeln überdecken lässt, hat eine davon ebenfalls Eigenschaft (E). Diese Kugel sei B_1. Wiederholen Sie dieses Argument mit B_1. Konstruieren Sie damit eine Cauchy–Folge $x_n \in B_n$. Die Existenz des Grenzwertes und die Konstruktion der Folge ergeben dann den gewünschten Widerspruch.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei V ein Vektorraum mit einer translations- und skalierungsinvarianten Metrik ρ, d.h.

$$\rho(u + w, v + w) = \rho(u, v), \qquad \rho(\lambda u, \lambda v) = |\lambda|\, \rho(u, v)$$

für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass durch $\|u\| := \rho(u, 0)$ eine Norm auf V definiert wird.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

(a) Für $1 < p < \infty$ und $a \in \mathbb{R}^N$ sei $\|a\|_p := \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Zeigen Sie, dass

$$\|a\|_p = \sup\{a \cdot b \mid \|b\|_{p'} = 1\}.$$

Folgern Sie hieraus, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^N$ definiert.

(b) Übertragen Sie die Aussage von (a) auf den Folgenraum

$$\ell^p = \{(a_1, a_2, \dots) \mid \|a\|_p < \infty\}$$

mit $\|a\|_p := \left(\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.