Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 17.01.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 12

Abgabe: **Donnerstag, 24.01.2002** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(11 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $1 \leq p < \infty$. Eine messbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ liegt im Raum $L^p_\omega := L^p_\omega(\Omega)$ (schwach–L^p), wenn es eine Konstante c_0 gibt so, dass für alle $\lambda > 0$ gilt:

$$\mu\big(\{x \,|\, |u(x)| > \lambda\}\big) \leq \Big(\frac{c_0}{\lambda}\Big)^p. \tag{1}$$

Das Infimum der Konstanten c_0 für die (1) erfüllt ist, wird mit $\|f\|_{L^p_\omega}$ bezeichnet.

(a) Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|_{L^p_\omega}$ eine Quasinorm ist, d.h.

(i) $\forall f \in L^p_\omega : \|f\|_{L^p_\omega} \geq 0$,

(ii) $\forall f \in L^p_\omega : \big(\|f\|_{L^p_\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0\big)$,

(iii) $\forall f \in L^p_\omega\ \forall \gamma \in \mathbb{R} : \|\gamma f\|_{L^p_\omega} = |\gamma|\, \|f\|_{L^p_\omega}$,

(iv) Es existiert eine Konstante $K > 0$ derart, dass:
$\forall f, g \in L^p_\omega : \|f + g\|_{L^p_\omega} \leq K\big(\|f\|_{L^p_\omega} + \|g\|_{L^p_\omega}\big)$.

Eine Quasinorm besitzt also die gleichen Eigenschaften wie eine Norm, nur dass die Dreicksungleichung durch eine verallgemeinerte Dreiecksungleichung ersetzt wird.

(b) Zeigen Sie, dass L^p_ω eine linearer topologischer Vektorraum ist, d.h. zeigen Sie, dass die Vektorraumoperatoren stetig sind. Dabei wird die Konvergenz auf L^p_ω definiert durch: $f_n \to f$ genau dann, wenn $\|f_n - f\|_{L^p_\omega} \to 0$. (Dies entspricht der von den Umgebungen $B_r(x) := \{y \in L^p_\omega \,|\, \|x - y\|_{L^p_\omega} < r\}$ erzeugten Topologie.)

(c) Zeigen Sie, dass die Einheitskugel $B := \{f \in L^p_\omega \,|\, \|f\|_{L^p_\omega} < 1\}$ nicht konvex ist.
Tipp: Für $p = 1$ sei $f(x) := \chi_{(0,\infty)} \frac{1}{x}$, $g(x) := \chi_{(-\infty,2)} \frac{1}{2-x}$.

(d) Zeigen Sie, dass $L^p \subsetneqq L^p_\omega$. Tipp: $f(x) := \chi_{(0,\infty)} \frac{1}{x}$ falls $p = 1$.

(e) Sei Ω beschränkt. Zeigen Sie, dass $L^{p+\varepsilon}_\omega \subsetneqq L^p$ für alle $\varepsilon > 0$.
Tipp: Sei $1 \leq q < \infty$ und $g \in L^q(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega |g(x)|^q \, dx = \int_\Omega \int_0^{|g(x)|} \tfrac{1}{q} \lambda^{q-1} \, d\lambda \, dx = \tfrac{1}{q} \int_\Omega \int_0^\infty \lambda^{q-1} \chi_{\{x \in \Omega \,|\, |f(x)| > \lambda\}} \, d\lambda \, dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \tfrac{1}{q} \int_0^\infty \int_\Omega \lambda^{q-1} \chi_{\{x \in \Omega \,|\, |g(x)| > \lambda\}} \, dx \, d\lambda = \tfrac{1}{q} \int_0^\infty \lambda^{q-1} \mu\big(\{x \in \Omega \,|\, |g(x)| > \lambda\}\big) \, d\lambda.$$

Benutzen Sie diese Gleichungskette mit $q := p$ und $g \in L^{p+\varepsilon}_\omega$.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Sei

$$\Theta(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Dies ist die sogenannte Heavyside–Funktion. Zeigen Sie, dass das Delta–Funktional δ auf $C([-1,1])$ die folgende Darstellung hat:

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-1}^{1} f \, d\Theta.$$

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge, $\mathcal{D} := C_0^\infty(\Omega)$ und K eine kompakte Teilmenge von Ω. Sei $u_n \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp} u_n \subset K$ und $\|\nabla^k u_n\|_\infty \leq C_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge u_{n_j} und ein $u \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp} u \subset K$ gibt, mit

$$\|\nabla^k (u_{n_j} - u)\|_\infty \xrightarrow{j} 0.$$