Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

24.01.2001

Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 13

Abgabe: **Donnerstag, 31.01.2002** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

(a) Sei $J := [0,1] \cap \big(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big)$. Zeigen Sie, dass sich J nicht als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen darstellen läßt.

(b) Zeigen Sie, dass es keine reellwertige Funktion auf dem Intervall $[0,1]$ gibt, die in jedem rationalen Punkt stetig und in jedem irrationalen Punkte unstetig ist.
Tipp: Zeigen Sie, dass sich die Menge der Stetigkeitspunkte als abzählbarer Schnitt von offenen Mengen A_n darstellen lässt: Ist f stetig in x, so existiert eine offene Kugel B_x um x mit $f(B_x) \subset B_{\frac{1}{n}}(f(x))$. Sei A_n die Vereinigung der B_x.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

(a) Für $N \in \mathbb{N}$ sei

$$X_N := \{f \in C([0,1]) \,|\, \exists\, x_0 \in [0,1]\, \forall\, y \in [0,1] \,:\, |f(x_0) - f(y)| \le N\, |x_0 - y|\}.$$

Zeigen Sie, dass X_N abgeschlossen und nirgends dicht ist in $C([0,1])$.
Tipp (nirgends dicht): Wähle $g_n \in C([0,1]$ mit $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, $|g_n'| \equiv n$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass es eine Funktion $f \in C([0,1])$ gibt, so dass f stetig, aber nirgends differenzierbar ist.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

(a) Sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $A_n \in L(E,F)$ ein Folge. Zeigen Sie: Ist $A_n x$ für jedes $x \in E$ konvergent, so definiert $A(x) := \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ eine Abbildung $A \in L(E,F)$.

(b) Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und M eine dichte Teilmenge von X. Für eine Folge $A_n \in L(X,Y)$ gelte:

(1) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$,

(2) Für jedes $x \in M$ ist $A_n x$ eine Cauchy–Folge in Y.

Zeigen Sie: $A_n x$ ist für jedes $x \in X$ konvergent in Y. Durch $A(x) := \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ wird ein $A \in L(X,Y)$ definiert mit $\|A\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Prinzip der Kondensation der Singularitäten: Sei $(A_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ ein Doppelfolge stetiger linearer Abbildungen eines Banachraumes E in einem normiertern Raum F. Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ gebe es ein x_j, so dass

$$\sup_k \|A_{j,k}x_j\| = \infty.$$

Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in E$ gibt, so dass für *alle* $j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_k \|A_{j,k}x_0\| = \infty.$$

Tipp: Sei $S_{j,N} := \{y \in E \mid \sup_k \|A_{j,k}(y)\| \leq N\,\|y\|\}$. Zeigen Sie, dass $S_{j,N}$ ein abgeschlossener Teilraum ist. Rest durch Widerspruchsbeweis.