Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

31.01.2001

# Funktionalanalysis I

WS 2001/02 — Blatt 14

Abgabe: **Donnerstag, 07.02.2002** (vor der Vorlesung)

**Aufgabe 1** **(4 Punkte)**

Seien $X, Y$ ein Banachräume und sei $A : X \to Y$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass $A$ genau dann stetig ist, wenn $A$ *schwach–schwach* stetig (d.h. aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt $Ax_n \rightharpoonup Ax$) ist.
Tipp: Satz vom abgeschlossenen Graphen.

**Aufgabe 2** **(4 Punkte)**

Sei $V$ ein normierter Vektorraum und $\varphi : V \to \mathbb{R}$ linear. Zeigen Sie: Die Hyperebene $\{\varphi = \alpha\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\varphi$ stetig ist. Gilt dies auch für topologische lineare Vektorräume?

**Aufgabe 3** **(5 Punkte)**

Sei $g$ eine Young–Funktion (d.h. $g(t) = \int_0^t \gamma(s)\,ds$ für $t \geq 0$ mit $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(s) > 0$ für $s > 0$, $\gamma$ ist rechtsseitig stetig, $\gamma$ ist nichtfallend auf $(0, \infty)$, $\lim_{s\to\infty} \gamma(s) = \infty$.)
Zeigen Sie, dass $g$ stetig, nichtnegativ, strikt wachsend und konvex auf $[0, \infty)$ ist und

$$\begin{aligned}
g(0) &= 0, & \lim_{t\to\infty} g(t) &= \infty, \\
\lim_{t\to 0^+} \tfrac{g(t)}{t} &= 0, & \lim_{t\to\infty} \tfrac{g(t)}{t} &= \infty, \\
g(\alpha t) &\leq \alpha\, g(t) & &\text{für } \alpha \in [0,1],\ t \geq 0, \\
g(\beta t) &\geq \beta\, g(t) & &\text{für } \beta > 1\ t \geq 0.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 4** **(4 Punkte)**

Sei $V$ ein normierter Raum und $g : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

(a) $g$ ist unterhalb stetig genau dann, wenn $\mathrm{epi}(g)$ abgeschlossen ist.

(b) $g$ ist konvex genau dann, wenn $\mathrm{epi}(g)$ konvex ist.

**Aufgabe 5** **(3 Punkte)**

Sei $V$ ein normierter Vektorraum und $u \in V$. Dann existiert ein $f \in V^*$ mit $\|f\|_{V^*} = \|u\|_V$ und $\langle f, u\rangle = \|u\|_V^2$. Sei zusätzlich $\|\cdot\|_{V^*}$ strikt konvex, d.h. aus $\|f_0\|_{V^*} = \|f_1\|_{V^*} = 1$, $f_0 \neq f_1$ folgt $\|(1-t)f_0 + tf_1\|_{V^*} < 1$ für alle $t \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass $f$ eindeutig bestimmt ist.