Abteilung für Angewandte Mathematik 06.11.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 3

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa1_ws06/

Abgabe: Montag, den 13. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Seien X, Y und Z normierte Räume, $A \in L(X,Y)$ und $B \in L(Y,Z)$. Zeigen Sie, dass $B \circ A \in L(X,Z)$ und $\|B \circ A\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Seien X und Y Banachräume und sei X_0 ein dichter Untervektorraum von X. Dann ist X_0 versehen mit der Norm von X ein normierter Raum. Zeigen Sie: Jedes $A \in L(X_0, Y)$ lässt sich eindeutig zu einem $A \in L(X,Y)$ fortsetzen. Die Fortsetzung erfüllt $\|A\|_{L(X,Y)} = \|A\|_{L(X_0,Y)}$.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei X ein Banachraum und sei $E \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann ist X/E ein Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\left\|\hat{x}\right\|_{X/E} := \inf_{y \in E} \|x - y\|_X$$

eine Norm auf X/E definiert. Dies ist die *Quotientennorm*.

(b) Zeigen Sie, dass X/E (versehen mit der Quotientennorm) ein Banachraum ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$ der Raum der beschränkten Folgen versehen mit der Supremumsnorm. Sei c_0 der Raum der Nullfolgen.

(a) Zeigen Sie, dass c_0 der Abschluss der Menge A in l^∞ ist, wobei

$$A := \{(x_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,:\, x_j \neq 0 \text{ für nur endlich viele } j \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass c_0 separabel ist und l^∞ nicht separabel ist.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Sei X ein Banachraum und sei $E \subset X$ ein Untervektorraum mit $\dim E < \infty$. Zeigen Sie, dass E abgeschlossen ist.